

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

31. Band, Heft 5

29. September 1949

S. 193—240

## Philosophie. Logik.

Carruccio, Ettore: *I fini dei „Calculus ratiocinator“ di Leibniz, e la logica matematica del nostro tempo.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 148—161 (1948).

Anknüpfend an Leibniz' Absicht, in einer *characteristica universalis*, verbunden mit einem *calculus ratiocinator*, ein Werkzeug zur Auflösung aller philosophischen Kontroversen zu gewinnen, wird als „das Problem von Leibniz“ die Aufgabe bezeichnet, festzustellen, ob eine Aussage  $X$  (1) aus einer Prämissenmenge  $A, B, \dots, L$  folgt, (2) mit  $A, B, \dots, L$  unverträglich ist, oder (3) von  $A, B, \dots, L$  unabhängig ist. Einfache Fälle der Lösbarkeit des Entscheidungsproblems werden als Teillösungen des Problems von Leibniz behandelt. Schließlich wird ein Beweis für die Unlösbarkeit des allgemeinen Entscheidungsproblems sowie des Problems von Leibniz angegeben, der sich auf Gödels Theorem über die Unmöglichkeit eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für ein deduktives System mit den Mitteln des Systems stützt. Da die Trennung von Sprache und Metasprache nicht einmal angedeutet ist, kann der angegebene Beweis jedoch nur als Plausibilitätsbetrachtung gelten.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Popper, K. R.: *The trivialization of mathematical logic.* Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 722—727 (1949).

Verf. kritisiert die Tragweite und die Angemessenheit der klassischen Matrizen-Methode und skizziert einen Aufbau der mathematischen Logik, der mit Gentzens Kalkülen  $LJ$  und  $LK$  [dies. Zbl. 10, 145] verwandt ist. Abweichungen: An Stelle des Sequenzzeichens „ $\rightarrow$ “ tritt ein metalogischer Grundbegriff, der manchmal syntaktisch und manchmal semantisch interpretiert wird, ohne daß diese Interpretationen getrennt werden. Die Schlußfiguren werden als Gebrauchsdefinitionen für die logischen Verknüpfungen aufgefaßt und gewinnen dadurch den Charakter von metalogischen Existenzaxiomen, was Verf. anscheinend übersieht. Vgl. auch dies. Zbl. 29, 196 und 30, 3, 101. Inwiefern damit eine „Trivialisierung“ erreicht wird, ist nicht klar ersichtlich.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Mostowski, A.: *Sur l'interprétation géométrique et topologique des notions logiques.* Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 767—769 (1949).

Anknüpfend an die bekannte geometrische Darstellung klassenlogischer Beziehungen (die Eulerschen Kreise) referiert Verf. über drei verschiedene Arten der Anwendung topologischer Methoden in der Metamathematik. An Stelle einer Wiedergabe der Referate sei auf die entsprechenden Arbeiten des Verf. hingewiesen: vgl. die beiden nachstehenden Referate und dies. Zbl. 29, 100. G. Hasenjaeger.

Mostowski, Andrzej: *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus.* J. symbolic Logic 13, 204—207 (1948).

Verf. deutet die Prädikatenvariablen als Funktionen, deren Argumente eine abstrakte Menge  $I$  durchlaufen und deren Werte in einem geeigneten algebraischen Bereich  $L$  liegen (in  $L$  müssen die den aussagenlogischen Verknüpfungen entsprechenden endlichen und die den Quantifikatoren entsprechenden unendlichen Operationen erklärt sein), und kann so den Ausdrücken Funktionale (d. h. Funktionen-funktionen) zuordnen, deren Werte in  $L$  liegen [„ $(I, L)$ -Funktionale“]. Es ist bekannt, daß die Sätze des klassischen Prädikatenkalküls dadurch ausgezeichnet sind, daß der Wert der ihnen zugeordneten Funktionale für jedes nichtleere  $I$  und jeden vollständigen Booleschen Verband identisch verschwindet (die Zuordnung ist naheliegend). Verf. sucht die in entsprechender Weise dem intuitionistischen



Prädikatenkalkül zugeordnete Klasse von Verbänden zu bestimmen. Ergebnis: Diese Klasse ist enthalten in der Klasse aller vollständigen „Brouwerschen“ Verbände. Die Umkehrung hiervon bleibt unentschieden. Dabei heißt ein vollständiger Verband Brouwersch, wenn in ihm das folgende unendliche distributive Gesetz gilt:  $a \cup \bigcap_{x \in A} x = \bigcap_{x \in A} (a \cup x)$ ; der Implikation  $a \supset b$  ist die Operation  $b \div a = \bigcap_{b \subset a \cup x} x$  zugeordnet. Der Umstand, daß die abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes einen vollständigen Brouwerschen Verband bilden, ermöglicht eine Reihe von Unableitbarkeitsbeweisen.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

**Mostowski, Andrzej:** On definable sets of positive integers. Fundam. Math., Warszawa 34, 81—112 (1947).

Es wird gezeigt, daß die allgemein rekursiven (entscheidbaren) und rekursiv aufzählbaren Mengen von positiven ganzen Zahlen den Anfang einer unendlichen Folge von Klassen bilden, deren Eigenschaften denen der projektiven Mengen im Sinne der deskriptiven Punktmengenlehre [vgl. Kuratowski, Topologie I, Warschau 1933; dies. Zbl. 8, 132] entsprechen. Dabei entsprechen die entscheidbaren Mengen von Zahlen den Borelschen Punktmengen. Der heuristische Wert dieser Zuordnung wird betont. —  $S$  sei ein beliebiges formales System, das Variablen vom Typ der positiven ganzen Zahlen enthält. Ein Ausdruck  $\varphi(x_1, \dots, x_k) = \varphi(\bar{x})$  heißt entscheidbar, wenn für jede Zifferneinsetzung  $x_i/n_i$  (entweder)  $\vdash \varphi(n)$  oder  $\vdash \text{non } \varphi(n)$  („ $\vdash$ “ für „beweisbar in  $S$ “).  $R_k$  sei die Menge der  $k$ -Tupel von positiven ganzen Zahlen. Die Folge der Klassen  $P_n^{(k)}$  und  $Q_n^{(k)}$  ergibt sich nun so: Eine Menge  $A \subset R_k$  liege in  $P_0^{(k)} = Q_0^{(k)}$ , wenn es einen  $k$ -stelligen entscheidbaren Ausdruck  $\varphi(\bar{x})$  gibt, so daß für alle  $n \in R_k$  genau dann  $n \in A$ , wenn  $\vdash \varphi(n)$ .  $A \subset R_k$  liege in  $P_{n+1}^{(k)}$ , wenn es ein  $B \subset Q_n^{(k+1)}$  gibt, so daß für jedes  $n \in R_k$  genau dann  $n \in A$ , wenn es eine Zahl  $p$  gibt, so daß  $(n, p) \in B$ .  $A \subset R_k$  liege in  $Q_{n+1}^{(k)}$ , wenn  $R_k - A \in P_{n+1}^{(k)}$ . Von den elementaren Eigenschaften der Klassen  $P_n^{(k)}$ ,  $Q_n^{(k)}$  sei erwähnt: Die  $P_n^{(k)}$  und  $Q_n^{(k)}$  sind Mengenringe, die Produkte  $P_n^{(k)} \cdot Q_n^{(k)}$  sind Mengenkörper, insbesondere  $P_0^{(k)} = P_0^{(k)} \cdot Q_0^{(k)}$ . Ferner gilt:  $P_n^{(k)} \subset P_{n+1}^{(k)} \cdot Q_{n+1}^{(k)}$ ,  $Q_n^{(k)} \subset P_{n+1}^{(k)} \cdot Q_{n+1}^{(k)}$  und  $P_1^{(k)} \cdot Q_1^{(k)} = F_0^{(k)}$  (dies als Analogon zu Suslins Theorem, vgl. Kuratowski, op. cit., p. 251). Für die Klasse einer Menge, die in logischen Symbolen definiert ist, erhält man eine obere Schranke [vgl. Kuratowski-Tarski, Fundam. Math., Warszawa 17, 240—248 (1931); dies. Zbl. 3, 105]. Hauptergebnis der Arbeit ist: Wenn  $S$  bestimmten Mindestforderungen an Ausdrucksreichtum genügt und die Arithmetisierung gewisser syntaktischer Beziehungen einer Rekursivitätsbedingung genügt, so ist  $P_0^{(k)}$  die Klasse der allgemein-rekursiven und  $P_1^{(k)}$  die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen, und eine Form des Cantorsche Diagonalverfahrens liefert das Resultat: Für alle  $n \geq 0$  und  $k \geq 1$  ist  $P_n^{(k)} \neq P_{n+1}^{(k)}$ ,  $Q_n^{(k)} \neq Q_{n+1}^{(k)}$  und  $P_{n+1}^{(k)} \neq Q_{n+1}^{(k)}$ . Dieses Resultat bleibt erhalten, wenn die Rekursivitätsbedingung durch die schwächere Bedingung ersetzt wird, daß die arithmetisierten Beziehungen von einer festen Klasse  $P_s^{(k)}$  mit geeignetem  $k$  sein sollen. Als Folgerung ergeben sich die Unvollständigkeitstheoreme von Gödel und Rosser.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

**Kalmär, L.:** On unsolvable mathematical problems. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 756—758 (1949).

Churchs Theorem über die Existenz absolut unlösbarer Probleme wird oft als wesentliche Verschärfung von Gödels Theorem über die Existenz von Problemen, die in einem formalen System  $S$  unlösbar sind, angesehen. Verf. weist diese Auffassung mit folgender Begründung zurück: (1) Gödels Theorem bezieht sich auf „Wahrheitsprobleme“ (Wahrheit einer Aussage), während Churchs Theorem sich auf „Entscheidungsprobleme“ (Verfahren zur simultanen Beherrschung abzählbar unendlich vieler Wahrheitsprobleme) bezieht. (2) Ein Sonderfall eines Theorems kann nicht mehr liefern als das Theorem selbst, und Churchs Theorem ergibt sich



durch Spezialisierung von Gödels Theorem auf das System  $Z_{00}$  in Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II, p. 412 (nach einer unveröffentlichten Arbeit von R. Péter, vgl. auch loc. cit. p. 416—421). — Unlösbare Probleme lassen sich schon formulieren mit Hilfe von „elementaren Funktionen“ (das sind die aus 1,  $a+b$ ,  $a \cdot b$ ,  $|a-b|$ ,  $[a/b]$ ,  $\sum_{x \leq n} t(x)$ ,  $\prod_{x \leq n} t(x)$  erzeugbaren; vgl. Verf.'s: Ein

einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem. [Ungarisch mit deutschem Auszug; Mat. fizik. Lapok 50, 1—23 (1943)]. „Gibt es eine natürliche Zahl  $x$ , so daß  $f(x) = n$ ?“ ist ein in  $S$  unlösbares Wahrheitsproblem, wenn die elementare Funktion  $f$  und die Zahl  $n$  in Abhängigkeit von  $S$  geeignet bestimmt werden. „Für welche natürlichen Zahlen  $y$  ist wahr, daß für alle  $x$   $F(x, y) = 0$ ?“ ist für eine geeignet bestimmte elementare Funktion  $F$  ein absolut unlösbares Entscheidungsproblem.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

**Wendelin, H.:** Ein Kriterium für die Erweiterbarkeit einer Implikation zu einer Äquivalenz. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Anz. 1948, 1—4 (1948).

In halbformaler Darstellung wird ein relationentheoretischer Satz abgeleitet, der unter gewissen Voraussetzungen die Umkehrbarkeit einer Implikation behauptet: Sind  $R(x, y)$  und  $S(x, y)$  Relationen von Funktionscharakter [d. h. gibt es zu jedem  $x$  genau ein  $y$ , so daß  $R(x, y)$  bzw.  $S(x, y)$ ], so folgt aus  $R(x, y) \rightarrow S(x, y)$ , daß auch die Umkehrung  $S(x, y) \rightarrow R(x, y)$  gilt. Der Satz bleibt gültig, wenn die Variablen  $x$  und  $y$  durch  $N$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_N)$  und  $M$ -Tupel  $(y_1, \dots, y_M)$  ersetzt werden.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

**Pasqual, José Tola:** Über eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes der Äquivalenz. Rev. Ci., Lima 50, 205—213 (1948) [Spanisch].

Die Äquivalenzbeziehung ist bekanntlich charakterisiert durch die Eigenschaften der Symmetrie, der Transitivität und der Reflexivität. Beispiele dafür sind die Beziehung der Gleichheit und die Beziehung der Kongruenz der ganzen Zahlen, die für eine Teilmenge von Zahlen erfüllt ist, wenn diese derselben Restklasse in bezug auf einen bestimmten Modul angehören. Verf. stellt sich die Aufgabe, den Begriff der Äquivalenz in gewissem Sinne zu verallgemeinern. Die Leitgedanken für die Definition dieser verallgemeinerten Äquivalenzbeziehung sind folgende: Sie wird eingeführt mit Hilfe von Eigenschaften, die denen der gewöhnlichen Äquivalenz ähnlich sind, so daß es auf Grund dieser Eigenschaften möglich ist, in einer abstrakten Mannigfaltigkeit  $C$  Konfigurationen zu bilden, die in gewisser Weise analog sind den Klassifikationen, zu welchen die gewöhnliche Äquivalenz Anlaß gibt. Bei der Gleichheit z. B. bilden alle unter sich gleichen Elemente eine Klasse; bei der Kongruenz gehören zu jedem Modul  $m$  ebenso viele Restklassen. Da nun eine Zerlegung einer Mannigfaltigkeit  $C$  in verschiedene Klassen es gestattet, eine Äquivalenzbeziehung zu definieren, die für die Elemente einer und derselben Klasse erfüllt ist, so muß die mit Hilfe der Konfigurationen in  $C$  eingeführte „Organisation“ für die verallgemeinerte Äquivalenz zu der besagten Äquivalenzbeziehung führen. Endlich muß die Äquivalenzbeziehung eingeschlossen sein in der Beziehung der verallgemeinerten Äquivalenz, von der sie einen besonderen Fall bilden soll. Die Verallgemeinerung erweist sich als abstrakter Ausdruck bekannter geometrischer Beziehungen.

E. Löffler (Stuttgart).

**Cuyppers, Karel:** Zu einer alten psychologischen Streitfrage. Euclides, Groningen 24, 35—40 (1948) [Holländisch].

Der scheinbar sich von selbst aufdrängenden statischen und realistischen Kardinalauffassung der natürlichen Zahl stellt Verf. die dynamisch-nominalistische entgegen unter der Betonung ihres pädagogischen Wertes. Dabei wendet er sich zugunsten einer gewissen Aufgelockertheit gegen starres Festhalten an einer der beiden Auffassungen. Dadurch ist auch der von ihm erwähnten nominalistischen Gefahr mechanischen Auswendiglernens vorgebeugt. — Für Verf. ist die Reihe der natürlichen Zahlen gegeben — a priori bzw. durch Konvention bzw. frei gewählt, aber ein für allemal gewählt, mit alsdann unabdingbarer Gültigkeit. H. Härten.

**Cuyppers, Karel:** Ordinalauffassung und Nominalismus in der theoretischen Arithmetik. Euclides, Groningen 24, 41—47 (1948) [Holländisch].

Wiederum von dem Gegensatz zwischen der anschaulich-räumlichen Kardinalauffassung und der logisch-zeitlichen Ordinalauffassung der natürlichen Zahlen ausgehend, erwähnt Verf. den charme der Originalität, den letztere pädagogisch



der ersteren voraus hat, indem die Zahl kein langweilig reelles Ding, sondern lediglich ein Name ist, sauber konventionell definiert. Der Begriff der Einheit wird nicht vorausgesetzt und so die psychologische Schwierigkeit der Einführung von Brüchen vermieden. Die Addition wird durch Abbildung auf die als gegeben angesehene Reihe der natürlichen Zahlen eingeführt, ihre Kommutativität unter Berufung darauf bewiesen, daß Abzählen von links nach rechts und umgekehrt dasselbe Ergebnis liefern. — Bei 15 jährigen Schülern soll ein streng logischer Aufbau von Arithmetik und Algebra bis einschließlich Wurzelziehen auf der Grundlage der gegebenen Zahlenreihe in etwa 60 Stunden erfolgen. *H. Härten (München).*

**Loria, Gino:** Osservazioni e documenti relativi al fenomeno della scoperta scientifica. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 35—45 (1947).

Verf. fragt nach den Umständen und Bedingungen, unter denen sich die wissenschaftliche Forschung und Entdeckung vollzieht. Er weist auf die Schwierigkeiten des Problems hin, die vor allem darin bestehen, daß geniale Menschen vieles wissen, ohne es studiert zu haben, während wir glauben, daß sie es ebenso gelernt haben müssen, wie wir. Das Problem ist wichtig für Psychologen und Physiologen; aber auch für den Wissenschaftshistoriker bietet es großes Interesse. Nur unter letzterem Gesichtspunkt wird es in der vorliegenden Arbeit behandelt. Verf. erörtert aus reicher Erfahrung und mit kritischer Behutsamkeit eine Reihe von Möglichkeiten, Einblick in die Wege zu bekommen, auf denen sich neue Wahrheiten entwickeln. Insbesondere weist er auf die Auswertung der zeitgenössischen Biographien, der Autographien, der Briefe und sonstigen Erklärungen großer Männer hin, wobei er aufschlußreiche Äußerungen von H. v. Helmholtz, H. Poincaré, C. F. Gauss und Joh. Kepler zitiert. Er enthüllt auf diese Weise einige charakteristische psychologische Vorgänge, die große Entdeckungen auf den Gebieten der Mathematik und der Physik auslösten oder erleichterten. In diesem Zusammenhang hätte auch auf einen Brief W. R. Hamiltons an seinen Sohn (5. August 1865) hingewiesen werden können, in dem er den Augenblick beschreibt, der in ihm den Grundgedanken der Quaternionentheorie aufblitzen ließ (vgl. R. P. Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, Bd. II, S. 434, Dublin 1885). Schließlich macht Verf. noch einige Bemerkungen über den physischen Zustand, in dem sich die Männer befanden, die das wissenschaftliche Gedankengut der Menschheit erweiterten und vertieften. Er ist natürlich nicht der Ansicht, das verwickelte Problem erschöpfend behandeln zu können. Deshalb wünscht er, daß andere Forscher noch weitere Dokumente über die Geistesarbeit genialer Menschen sammeln, weil der erste Schritt zur Lösung eines Problems getan sei, wenn man es klar formuliert habe. *E. Löffler (Stuttgart).*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome:

**Grascher, P.:** Differentiation verallgemeinerter Matrizen. Jber. Realgymn. Judenburg, Graz 1947, 3—11 (1947).

Unter teilweiser Beziehung auf seine nicht veröffentlichte Dissertation „Multiplikation verallgemeinerter Matrizen“ entwickelt Verf. einige Sätze, wie man verallgemeinerte Matrizen  $(a_{i_1 i_2 \dots i_n})$  mit  $1 \leq i_j \leq m_j$  entweder nach darin vorkommenden Parametern differenziert oder komplizierteren Differentialoperationen, Verallgemeinerungen des Nablaoperators, unterwerfen kann, wobei sich herausstellt, daß die Differentialoperatoren der Vektoranalysis spezielle Fälle darstellen.

*Holzer (Graz).*

**Blij, F. van der:** Eine Parameterdarstellung für orthogonale Matrizen. Simon Stevin, wis. natuurb. Tijdschr. 26, 74—80 (1948/49) [Holländisch].

Verf. geht aus von der Cayleyschen Parameterdarstellung für orthogonale, der Bedingung  $|A + E| \neq 0$  genügende Matrizen  $A$  eines beliebigen Grades  $n$ , die er in der folgenden Form schreibt:

$$(1) \quad A = -E + 2d \frac{\overline{B + dE}}{|B + dE|}$$

( $B$  = schiefsymmetrische,  $\overline{B + dE}$  = adjungierte Matrix von  $B + dE$ ). Im zweiten Term der rechten Seite von (1) entwickelt er Zähler und Nenner nach Potenzen des Parameters  $d$  und macht dann mit Unterscheidung der Fälle  $n \equiv 0(2)$  bzw.



$n \neq 0(2)$  unter gewissen Zusatzvoraussetzungen über das gleichzeitige Verhalten der Elemente von  $B$  den Grenzübergang  $d \rightarrow 0$ . Er gewinnt so neue Parameterdarstellungen für Scharen von orthogonalen Matrizen, unter denen auch Matrizen  $A$  mit  $|A + E| = 0$  auftreten. Angeregt ist die Untersuchung durch eine Arbeit von van der Woude [Proc. Akad. Wet. Amsterdam **49**, 866—877 (1946)]. *Krull*.

**Arf, Cahit: Sur la définition des déterminants.** Univ. Istanbul, Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst. 9—20 (1948).

Verf. gibt eine rekursive Definition der Determinante, so daß die Cramersche Formel für die Lösung des linearen Gleichungssystems von  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten unmittelbar aus der Definition folgt. Er leitet sodann aus dieser Definition die üblichen Determinanteneigenschaften ab, wobei z. B. der Satz, daß eine schiefsymmetrische Determinante gerader Ordnung das Quadrat eines Polynoms in den Elementen ist, fast ohne Rechnung folgt. *Holzer* (Graz).

**Erim, Kerim: Ein algebraisches Theorem.** Univ. Istanbul, Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst. 32—38 (1949).

Verf. beweist den bekannten Satz von Pellet: Das Polynom  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$  hat im Einheitskreise  $k$  Nullstellen, wenn  $2|a_k| > \sum |a_k|$  ist. Die Transformation  $\zeta = i \frac{1-z}{1+z}$  bildet den Einheitskreis auf die obere Halbebene ab. Durch Anwendung des Pelletschen Satzes ergibt sich ein Kriterium dafür, daß  $f(z)$  in der oberen Halbebene  $k$  Nullstellen besitzt. Im Falle  $n = 3$  gibt Verf. eine geometrische Interpretation. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

**San Juan Llosá, Ricardo: Darstellung einiger klassischer Sätze der Galoisschen Theorie.** Rev. Acad. Ci. exact físic. natur. Madrid **42**, 71—78 (1948) [Spanisch].

Neuer, einfacher Beweis der bekannten Sätze über irreduzible, metazyklische Gleichungen von Primzahlgrad im Geiste der klassischen Gleichungs- (nicht der modernen Körper-)Algebra. *Krull* (Bonn).

## Gruppentheorie:

**Piccard, Sophie: Deux propositions de la théorie des groupes de substitutions.** Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 135—146 (1948).

Es sei  $\mathfrak{S}_n[\mathfrak{A}_n]$  die symmetrische (alternierende) Gruppe der Ziffern  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $G$  sei eine transitive Gruppe von Permutationen der Ziffern  $\{1, 2, \dots, m\}$  mit  $m \geq 2$ ,  $m < n$ ; es werden Bedingungen gesucht, unter denen eine Substitution  $S$  aus  $\mathfrak{S}_n$  zusammen mit allen Substitutionen aus  $G$  die Gruppe  $\mathfrak{S}_n[\mathfrak{A}_n]$  erzeugt.  $S$  muß alle Ziffern aus  $\{m+1, \dots, n\}$  bewegen.  $S$  heißt mit  $G$  verbunden, wenn jeder Zyklus von  $S$  wenigstens je eine Ziffer aus  $\{1, 2, \dots, m\}$  und  $\{m+2, \dots, n\}$  enthält.  $S$  heißt primitiv mit  $G$ , wenn die durch  $S$  mit  $G$  erzeugte Gruppe primitiv ist. — Ist nun speziell  $G$  die symmetrische Gruppe der Ziffern  $\{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 2$ ) und  $S$  verbunden und primitiv mit  $G$ , dann erzeugt  $S$  mit allen Substitutionen aus  $G$  die  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq m$ ). Ist dagegen  $G$  nur die alternierende Gruppe der Ziffern  $\{1, 2, \dots, m\}$  ( $m \geq 3$ ), so wird durch  $S$  zusammen mit  $G$  die  $\mathfrak{S}_n$  bzw.  $\mathfrak{A}_n$  erzeugt, je nachdem  $S$  ungerade oder gerade ist. *Wever* (Göttingen).

**Baer, Reinhold: Finiteness properties of groups.** Duke math. J. **15**, 1021—1032 (1948).

Jede endliche Gruppe  $G$  hat die drei Eigenschaften: (FC) Jedes Element besitzt nur eine endliche Anzahl von Konjugierten in  $G$ . (LF) Jedes Element von  $G$  ist in einem endlichen Normalteiler von  $G$  enthalten. (FO) Es gibt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorgegebener Ordnung in  $G$ . Aber es gibt Gruppen unendlicher Ordnung, die ebenfalls diese drei Eigenschaften besitzen. Verf. untersucht die Beziehungen der genannten drei Eigenschaften zueinander und charakterisiert diejenigen Gruppen, welche sie besitzen. (LF)-Gruppen und (FO)-Gruppen sind



(FC)-Gruppen ohne Elemente der Ordnung 0 (unendliche Ordnung). Es zeigt sich, daß  $G$  eine (LF)-Gruppe dann und nur dann ist, wenn  $G$  eine (FC)-Gruppe ohne Elemente der Ordnung 0 ist. So zieht die Eigenschaft (FO) die Eigenschaft (LF) und die Eigenschaft (LF) die Eigenschaft (FC) nach sich; die Umkehrung gilt in keinem der beiden Fälle. Verf. kann zeigen: a)  $G$  ist eine (FC)-Gruppe dann und nur dann, wenn jedes ihrer Elemente in einem aus endlich vielen Elementen erzeugbaren Normalteiler von  $G$  liegt und die Faktorgruppe nach dem Zentrum  $Z(G)$  von  $G$  eine (LF)-Gruppe ist. b)  $G$  ist eine (FO)-Gruppe dann und nur dann, wenn  $Z(G)$  eine (FO)-Gruppe ist und die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  zu jeder Primzahl  $p$  nur endlich viele Elemente der Ordnung  $p$  enthält. Grün (Berlin).

Kiokemeister, Fred: A note on the Schmidt-Remak theorem. Bull. Amer. math. Soc. 53, 957—958 (1947).

Verf. beweist einen Satz, der eine Abwandlung des Satzes von Remak-Schmidt bedeutet. Von den dort vorausgesetzten beiden Bedingungen des Doppelkettensatzes wird hier nur die Minimalbedingung unverändert übernommen [vgl. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig 1937; dies. Zbl. 18, 9]. An Stelle der Maximalbedingung tritt eine „modifizierte Maximalbedingung“, die besagt, daß in einer Gruppe  $G$  mit Operatorbereich  $\Omega$  die Kette von Untergruppen  $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H \neq G$  endlich ist, wenn die  $H_i$  gegenüber  $\Omega$  zulässige Untergruppen sind. Es sei nun  $G$  eine Gruppe mit Operatorbereich  $\Omega$ , der die inneren Automorphismen enthalte, und  $G = A_1 \times A_2 \times \dots$  eine Remaksche Zerlegung in unzerlegbare Faktoren  $A_i$ , die gegenüber  $\Omega$  zulässig sind. Dann gilt unter den beiden obigen Bedingungen: Eine zweite Zerlegung  $G = B_1 \times B_2 \times \dots$  in unzerlegbare Faktoren besitzt genau soviel Faktoren wie die erste, bei geeigneter Anordnung der  $A_i$  ist  $A_i \cong B_i$ , und schließlich für jedes  $j$ :

$$G = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_j \times A_{j+1} \times A_{j+2} \times \dots$$

Zum Beweise werden noch zwei Hilfssätze herangezogen, die aussagen, wann ein Operator ein Automorphismus ist. Wever (Göttingen).

Lyndon, Roger C.: The cohomology theory of group extensions. Duke math. J. 15, 271—292 (1948).

Kohomologiegruppen  $H^n(G, K)$  einer beliebigen Gruppe  $G$  über einer abelschen Koeffizientengruppe  $K$  wurden von Eilenberg und MacLane eingeführt. [Ann. Math., Princeton, II. s. 46, 480—509 (1945); vgl. ferner H. Hopf, Comment. math. Helvetici 17, 39—79 (1944) und B. Eckmann, Comment. math. Helvetici 17, (1944).] Hier werden diese Kohomologiegruppen für ein direktes Produkt  $G = A \times B$  und fernerhin für eine Gruppenerweiterung einer Gruppe  $B$  mit einer Gruppe  $A$ , so daß  $G/B = A$  ist, in ihrer Abhängigkeit von den Kohomologiegruppen von  $A$  und  $B$  untersucht. Besonders wird der Fall betrachtet, daß sowohl  $A$  wie  $B$  abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden sind. In diesem Falle können die  $H^n(G, K)$  bekanntlich als Homologiegruppen von topologischen Produkten allgemeiner Tori und von geeigneten Linsenräumen dargestellt werden; hier werden explizite Formeln für diese Homologiegruppen aufgestellt. Allgemein wird bewiesen:  $H^n(A \times B, K)$  enthält eine Kette von Untergruppen  $H^n = \bar{H}^0 \supset \bar{H}^1 \supset \dots \supset \bar{H}^n \supset \bar{H}^{n+1} = 0$  mit einem natürlichen Isomorphismus von  $\bar{H}^\lambda / \bar{H}^{\lambda+1}$  in eine Faktorgruppe von  $H^\lambda(A, H^{n-\lambda}(B, K))$ . Es werden Übertragungen dieses Resultats auf den Fall allgemeiner Gruppenerweiterungen angegeben. Franz.

Kaloujnine, L.: Sur le groupe  $P_\infty$  des tableaux infinis. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1097—1099 (1947).

Verf. behandelt  $p$ -Gruppen nach einer Methode, deren Kern sich anschaulich so darstellen läßt. Auf einem großen Kreise befinden sich die Mittelpunkte von  $p$  (= ungerade Primzahl) kleinen Kreisen, deren jeder wieder  $p$  kleinere Kreise trägt usw. Jeder dieser Kreise könne unabhängig von den übrigen rotieren. Die Bewe-



gungen dieses Systemes, welche die Kreise miteinander zur Deckung bringen, bilden eine  $p$ -Gruppe. Man erhält für  $m$  ( $= 1, 2, \dots$ ) derartige „Etagen“ von Kreisen als Gruppe gerade die  $p$ -Sylowgruppe von  $S_m$ . In obiger Note wird diese Methode ausgebaut und für  $m = \infty$  definiert. Durch Einführung eines geeigneten Umgebungsbegriffes wird die Gruppe topologisiert. Sie erweist sich als vollständig und kompakt. Es gelingt, einige Struktursätze darüber aufzustellen. *Grün.*

### Ringe. Körper:

**Johnson, R. E.:** Equivalence rings. *Duke math. J.* **15**, 787—793 (1948).

Verf. nennt einen Ring  $\mathfrak{R}$  einen Äquivalenzring, wenn für zwei beliebige Elemente  $a, b$  aus  $\mathfrak{R}$  stets entweder eine Gleichung  $a = p \cdot b \cdot q$  oder eine Gleichung  $b = p \cdot a \cdot q$  ( $p, q$  in  $\mathfrak{R}$ ) gilt. Der Äquivalenzring  $\mathfrak{R}$  heißt 1-Äquivalenzring, wenn für jedes Elementepaar  $a \neq 0, b \neq 0$  aus  $\mathfrak{R}$  stets  $b = p_1 \cdot a \cdot q_1, a = p_2 \cdot b \cdot q_2$  ( $p_i, q_i$  in  $\mathfrak{R}$ ) wird. Die 1-Äquivalenzringe zeigen nahe Verwandtschaft zu den Schiefkörpern; ein 1-Äquivalenzring ist dann und nur dann ein Schiefkörper, wenn er nullteilerfrei ist und ein von 0 verschiedenes Idempotent enthält. Die nullteilerfreien kommutativen Äquivalenzringe mit Einheitselement sind identisch mit den Bewertungsringen (im allgemeinsten Sinne des Wortes). Wie unmittelbar zu sehen, ist der Ring aller Matrizen eines festen Grades  $n$  über einem Schiefkörper  $D$  stets ein Äquivalenzring. Darüber hinaus zeigt Verf., daß der Automorphismenring  $\mathfrak{R}$  eines beliebigen Moduls  $\mathfrak{M}$  mit einem Schiefkörper  $D$  als Multiplikatorenbereich immer ein Äquivalenzring sein muß. Ferner beweist er, gewissermaßen als abschließendes Ergebnis der ganzen Note, den Satz: Ein nichttrivialer einfacher Ring [im Sinne von N. Jacobson, *Trans. Amer. math. Soc.* **57**, 228—245 (1945)] ist entweder ein regulärer Äquivalenzring mit minimalen Rechtsidealen oder ein Unterring eines regulären 1-Äquivalenzringes. (Dabei heißt ein Ring  $\mathfrak{R}$  regulär, wenn er zu jedem  $a$  ein  $b$  enthält, derart, daß  $a = a \cdot b \cdot a$  wird.) — Für die Untersuchung eines regulären Äquivalenzringes  $\mathfrak{R}$  erweist es sich als zweckmäßig, jedem Element  $a \neq 0$  das System  $F_a$  aller der  $b$  zuzuordnen, für die zwar die Gleichung  $\xi \cdot a \cdot \eta = b$ , aber nicht die Gleichung  $\xi \cdot b \cdot \eta = a$  in  $\mathfrak{R}$  lösbar ist. Setzt man  $F_a < F_c$ , falls  $F_a$  echte Untermenge von  $F_c$ , und bezeichnet man mit  $\cup$  bzw.  $\cap$  die Bildung von Summe und Durchschnitt im Sinne der Mengenlehre, so stellt die Gesamtheit aller  $F_a$  hinsichtlich der Operationen  $\cup$  und  $\cap$  einen relativ der Beziehung  $<$  linear geordneten Verband  $L$  dar, der zu einem vollständigen linear geordneten Verband  $L^*$  wird, wenn man alle unendlichen Durchschnitte  $\cap_s F_a$  ( $S$  beliebige Untermenge von  $\mathfrak{R}$ ) hinzunimmt. Man erhält nun leicht die Sätze: Es ist dann und nur dann  $L = L^*$ , wenn  $L$  wohlgeordnet ist. Die Menge aller  $\mathfrak{R}$ -Ideale stellt einen vollständigen Teilverband von  $L^*$  dar. Ist  $L = L^*$ , so ist jedes  $\mathfrak{R}$ -Ideal mit einem der Systeme  $F_a$  identisch. *Krull (Bonn).*

**Kaplansky, Irving:** Topological rings. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 809—826 (1948).

Ein sehr wertvoller, knapper, aber inhaltsreicher Bericht über die Entwicklung der Theorie der topologischen Ringe von den grundlegenden Arbeiten von Dantzig bis zum heutigen Stand. Das beigefügte Literaturverzeichnis, das im übrigen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, umfaßt 83 Nummern. Die besprochenen Arbeiten sind in 3 Gruppen eingeteilt: Topologische Schiefkörper, lokal kompakte Ringe, normierte Algebren (die in einer normierten Algebra für jedes Element definierte Norm  $\|a\|$  muß hinsichtlich der Multiplikation der Bedingung  $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  genügen). — Aus dem Bericht geht deutlich hervor, daß unter den topologischen Ringen die normierten Algebren, insbesondere die im Sinne der Topologie vollständigen Banachschen Algebren zur Zeit im Vordergrund des Interesses stehen. Vor allem verspricht nach Ansicht des Verf. die weitere Untersuchung der



zu den Banachschen Algebren gehörigen, den lokal kompakten Gruppen zugeordneten Gruppenalgebren zu Ergebnissen von größter Bedeutung zu führen.

Krull (Bonn).

**Kochendörffer, Rudolf:** Über einen speziellen Matrizenring. Math. Nachr., Berlin 1, 345—349 (1948).

Es sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $p \geq 0$  und  $\mathfrak{M}$  die Algebra aller  $h$ -reihigen Matrizen  $(m_{ik})$  über  $k$ , für welche  $s(m_{ik}) = \sum_{k=1}^h m_{ik}$  und  $z(m_{ik}) = \sum_{i=1}^h m_{ik}$  von  $i$  bzw.  $k$  unabhängig ausfallen.  $\mathfrak{N}$  sei die Teilalgebra der  $(m_{ik})$  mit  $s(m_{ik}) = z(m_{ik}) = 0$ ; sie bildet ein zweiseitiges Ideal in  $\mathfrak{M}$ . Für  $p = 0$  oder  $(p, h) = 1$  ist  $\mathfrak{N}$  ein direkter Summand und  $\cong$  der Matrixalgebra vom Grade  $h - 1$ ; der komplementäre Summand ist  $\cong k$ . Für  $p/h$  ist die Restklassenalgebra  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$  die direkte Summe zweier zu  $k$  isomorpher Körper. Die Restklassenalgebra von  $\mathfrak{N}$  nach dem Radikal von  $\mathfrak{N}$  ist  $\cong$  der Matrixalgebra vom Grade  $h - 2$ . Eichler.

**Levi, F. W.:** Pairs of inverse modules in a skewfield. Bull. Amer. math. Soc. 53, 1177—1182 (1947).

Ein Untermodul eines Schiefkörpers heißt  $J$ -Modul, wenn er mit zwei verschiedenen Elementen  $a, b \neq 0$  stets  $(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$  enthält, und  $S$ -Modul, wenn er das Einselement sowie zu  $a \neq 0$  stets  $a^{-1}$  enthält. Satz 1: Ein Untermodul ist  $J$ -Modul genau dann, wenn er mit  $a, b \neq 0$  auch  $ab^{-1}a$  enthält. Folgerungen: Ein  $J$ -Modul, der das Einselement enthält, ist  $S$ -Modul. Jeder  $J$ -Modul kann in der Form  $aS$  mit  $S$  als  $S$ -Modul geschrieben werden. Satz 2: Wenn ein  $S$ -Modul die Elemente  $a, b$  und  $ab$  enthält, so umfaßt er den von  $a, b$  erzeugten Unterschiefkörper (= Durchschnitt aller Unterschiefkörper, welche  $a$  und  $b$  enthalten). Satz 3: Jeder endliche  $S$ -Modul ist ein Galois-Feld.

G. Pickert (Tübingen).

**Banerjee, D. P.:** On the selfinverse module. Math. Student, Madras 15, 17—18 (1947).

Ein Modul  $A$  heißt nach F. W. Levi [J. Indian math. Soc. 3, 295—306 (1939); dies. Zbl. 22, 302] selbstinvers, wenn mit  $a$  stets auch  $a^{-1}$  zu  $M$  gehört. Verf. beweist auf rechnerischem Wege einige Ergänzungsbemerkungen zu der genannten Levischen Arbeit, die sich im wesentlichen auf den zu einem selbstinversen Modul  $A$  gehörigen Multiplikationsbereich  $M(A)$  bzw. Divisionsbereich  $Q(A)$  beziehen.

Krull (Bonn).

**Vinograd, B.:** Note on an invariant of commutative algebras. Jowa College, J. Sci., 23, 101—102 (1949).

Eine Algebra heißt „gespalten“ (cleft), wenn sie direkte Modulsumme ihres Radikals und einer anderen Unter algebra ist. Ist  $N$  das Radikal einer primären kommutativen Algebra über dem Körper  $K$  der Charakteristik  $p > 0$ , welcher als maximaler separabler Unterkörper von  $A$  gewählt sei,  $A/N = K(C_1, \dots, C_n)$  mit  $C_i$  als Restklasse mod.  $N$  von  $c_i \in A$ ,  $g_i(x)^{r_i}$  das Minimalpolynom von  $c_i$  mit  $r_i > 1$  und  $g_i(x) = x^{p^{e_i}} - k_i$  irreduzibel über  $K$ , so ist  $A$  nicht gespalten in den Fällen: (1)  $g_i(c_i) \not\equiv 0 \pmod{N^{p^{e_i}}}$  für ein  $i$ , (2)  $N^{p^{e_i}} = 0$  für ein  $i$ . Weitere Sätze: A. Ein irreduzibles Polynom  $g(x)$  ist genau dann separabel, wenn es ein Polynom  $h(x)$  mit  $g(h(x)) \equiv 0 \pmod{g(x)^2}$  gibt. B. Eine Polynomalgebra ist genau dann gespalten, wenn jeder irreduzible Faktor im Minimalpolynom ihres erzeugenden Elementes separabel ist. C. Ist eine kommutative Algebra  $A$  über  $K$  mit Einselement mod.  $N$  (= Radikal) eine direkte Summe einfacher Erweiterungen, so ist sie genau dann nicht gespalten, falls es in ihr ein Element  $d \notin N$  so gibt, daß  $d + n$  für kein  $n \in N$  in einem  $K$  enthaltenden Unterkörper von  $A$  liegt. — Zu verbessern: In B muß es statt „Faktor“ heißen: „mehrfache Faktor“; in C ist die angegebene Bedingung hinreichend für Nichtgespaltenensein nur bei primären Algebren.

G. Pickert (Tübingen).



**Karpelevič, F. I.:** Pseudonormen im Ring der ganzen Zahlen. Uspechi mat. Nauk 3, 174—177 (1948) [Russisch].

Die von K. Mahler [Acta math., Uppsala 66, 79—119 (1936); dies. Zbl. 13, 51] eingeführte reellwertige Pseudobewertung (P.B.)  $\varphi(x)$  der Elemente  $x$  eines Ringes ist durch I.  $\varphi(x) > 0$  für  $x \neq 0$ ;  $\varphi(0) = 0$ ; II.  $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ ; III.  $\varphi(xy) \leq \varphi(x)\varphi(y)$  erklärt. Es seien  $k$  und  $l$  natürliche Zahlen und  $0 < \varrho < 1$ . Dann wird durch  $\varphi_{k,l}(x) = 1$ , wenn  $k \nmid x$ ,  $\varphi_{k,l}(x) = \varrho^x$ , wenn  $k \mid x$  und  $l^x$  die genaue in  $x$  stekende Potenz von  $l$ , eine P.B. des Ringes  $R$  der ganzen Zahlen definiert. Jede P.B. von  $R$  ist äquivalent entweder einer P.B.  $\varphi_{k,l}$  oder der Bewertung durch den gewöhnlichen absoluten Betrag. Dieser ebenfalls schon bei Mahler (a. a. O.) stehende Satz wird vom Verf. nochmals bewiesen.

H. L. Schmid (Berlin).

**Gröbner, W.:** Über die Syzygientheorie der Polynomideale. Mh. Math., Wien 53, 1—16 (1949).

In 1. und 2. wird unter Benutzung der Matrizen Schreibweise ein neuer, einfacher Beweis für das Abbrechen der Syzygienkette eines Formenideals in  $n+1$  Variablen  $x_0, \dots, x_n$  nach höchstens  $n+1$  Gliedern gegeben. Den Kernpunkt bildet der folgende, durch einen eleganten Induktionsschluß bewiesene Hilfssatz: Ist der Vektor (die Spalte)  $S$  eine Syzygie aus dem  $k$ -ten Syzygienmodul  $U^k$  des Formenideals  $a$  und läßt sich  $S$  für irgendein  $j < k$  in der Gestalt  $S = \varphi_1 \cdot S_1 + \dots + \varphi_j \cdot S_j$  darstellen, wobei die  $S_i$  Vektoren, die  $\varphi_i$  Formen sind und das Ideal  $(\varphi_1, \dots, \varphi_j)$  der Hauptklasse angehört (also die projektive Dimension  $n-j$  besitzt), so gibt es eine ausgezeichnete Darstellung  $S = \varphi_1^* S_1^* + \dots + \varphi_j^* S_j^*$ , bei der die  $S_i^*$  zu  $U^*$  gehören, und es kann infolgedessen  $S$  nicht Element einer Minimalbasis von  $U^k$  sein. — Aus den beim Beweise des Syzygien-Kettensatzes benutzten Überlegungen ergibt sich in 3. leicht weiter: Ein Formenideal  $a$  der projektiven Dimension  $d$  ist dann und nur dann perfekt im Sinne von Macaulay [d. h. im wesentlichen, es lassen sich dann und nur dann die Formen  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  so bestimmen, daß  $(a, \varphi_1, \dots, \varphi_d)$  ungemischt null-dimensional wird], wenn die Syzygienkette von  $a$  genau  $n-d$  Glieder besitzt. — Dieses Resultat gestattet, wie in 4. gezeigt wird, gewisse Anwendungen auf die algebraische Geometrie. Nennt man eine algebraische Kurve im 3-dimensionalen Raum perfekt, wenn sie das Nullstellengebilde eines perfekten Formenideals ist, so erhält man den Satz, daß eine Raumkurve dann und nur dann perfekt ist, wenn sie durch ein Matrizenideal im Sinne von Macaulay definiert wird. Weiter ergibt sich, daß die perfekten Raumkurven dadurch ausgezeichnet sind, daß auf sie, aber auch nur auf sie der Noethersche Fundamentalsatz der ebenen algebraischen Geometrie ohne Änderung des Wortlautes übertragen werden kann. — Die Sätze der vorliegenden Note finden sich — mit etwas ausführlicheren Beweisen und teilweise allgemeiner Fassung der geometrischen Anwendungen — auch im letzten Kapitel des kürzlich erschienenen Lehrbuchs des Verf. (Moderne Algebraische Geometrie. I. Die idealtheoretischen Grundlagen. Wien und Innsbruck, Springer-Verlag 1949).

Krull (Bonn).

## Zahlentheorie:

**Ward, Morgan:** Euler's problem on sums of three fourth powers. Duke math. J. 15, 827—837 (1948).

Verf. zeigt, daß eine Gleichung  $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$  mit natürlichem  $x, y, z, w$  für  $w < 10^4$  unmöglich ist.

Holzer (Graz).

**Palamá, G.:** Metodi per avere soluzioni parametriche della  $a_1, \dots, a_p \stackrel{2,4}{=} b_1, \dots, b_p$ , nei casi  $p = 3, p = 4$ . Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 48—64 (1947).

Die Bezeichnungen sind die vom Verf. normierten [vgl die Besprechung seiner Arbeit dies. Zbl. 31, 10]. Sei ein System

$$a_1, a_2, a_3 \stackrel{x}{=} b_1, b_2, b_3$$



mit  $x = (2, 4)$  gegeben und ist  $a_3 = a_1 + a_2$ ,  $b_3 = b_1 + b_2$ , so gilt für beliebige nicht verschwindende, voneinander verschiedene  $p, q$

$$a_1 p - a_2 q, a_2 p + a_3 q, a_3 p + a_1 q \stackrel{x}{=} b_1 p - b_2 q, b_2 p + b_3 q, b_3 p + b_1 q.$$

In ähnlicher Weise werden noch weitere Sätze gegeben. Holzer (Graz).

**Palamà, G.:** Generalizzazione di due teoremi sulle uguaglianze multigrade, su delle trasformazioni di esse e sulle multigrade a catena. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 95—120 (1947).

Unter Verwendung der vom Verf. normierten Bezeichnungen gelte: (1)  $n$  und  $r$  seien natürliche Zahlen,  $r > n$ . (2) Sei  $a_1, \dots, a_r \stackrel{n}{=} b_1, \dots, b_r$ . (3) Seien  $S_i, T_i$  die  $i$ -ten Potenzsummen der  $a_i$ , bzw.  $b_i$  (also  $S_i = T_i$  für  $i \leq n$ ). (4)  $a'$  (Verf. schreibt  $a$  al 1°) soll heißen, der Vektor rechts entstehe aus dem Vektor links durch Vertauschung der  $a_i$  und  $b_i$ . (5) Sei  $k = 2(T_{n+2} - S_{n+2})/[(n+2)(T_{n+1} - S_{n+1})]$  (durch Druckfehler entsteht). Dann gelten folgende Sätze: 1. Ist  $n$  ungerade, so wird  $a_1, \dots, a_r, k - b_1, k - b_2, \dots, k - b_r \stackrel{n+2}{=} a'$ . 2. Bei geradem  $n$  gilt  $a_1, \dots, a_r, k - a_1, \dots, k - a_r \stackrel{n+2}{=} a'$ . Weiter gilt stets: 3.  $a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_r, a_2 + a_3, \dots, a_{r-1} + a_r \stackrel{n}{=} a'$ , wo links und rechts ein  $\binom{r}{2}$ -dimensionaler Vektor steht. 4. Sei  $s = p!$ . Es ist  $A_1, \dots, A_s \stackrel{n}{=} B_1, \dots, B_s$ , wo  $A_1, \dots, A_s$  die  $s$  innern Produkte eines beliebigen  $r$ -dimensionalen festen Vektors  $(m_1, \dots, m_r)$  mit den  $s$  Vektoren sind, die aus  $(a_i) = a_1, \dots, a_r$  durch Vertauschung der Koordinaten entstehen und die  $B_j$  analog aus  $(b_i)$  gebildet sind. 5. Mit der unter 4. eingeführten Vektorabkürzung, wo noch die Klammer weggelassen werde, gilt für beliebiges  $\lambda, \alpha$ :  $\lambda a_i + \alpha \stackrel{n}{=} \lambda b_i + \alpha$ . Hierbei ist Addition einer Zahl zu einem Vektor Addition zu jeder Koordinate. 6. Sind je  $m$  Größen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m$  (nicht alle null) gegeben, so gilt folgendes „fortlaufende Tarry-Escott-System“ (multigrada a catena):  $\lambda_1 a_i + \alpha_1, \dots, \lambda_m a_i + \alpha_m \stackrel{n}{=} \lambda_1 c_i + \alpha_1, \lambda_2 c_i + \alpha_2, \dots, \lambda_m c_i^{(m-1)} + \alpha_m$ , wo  $c_i, c'_i, c''_i, \dots$  entweder  $a_i$  oder  $b_i$  sind. 7. Gilt das fortlaufende Tarry-Escott-System  $a_{1i} \stackrel{n}{=} a_{2i} \stackrel{n}{=} \dots \stackrel{n}{=} a_{mi}$  und sind  $h_1, \dots, h_m$  nicht durchwegs verschwindende Parameter, so ist  $a_{1i} + h_1, \dots, a_{mi} + h_m \stackrel{n}{=} a_{1i} + h_{j+1}, \dots, a_{mi} + h_{j+m}$ , indem  $h_{m+1} = h_1, h_{m+2} = h_2, \dots$  sei. Holzer (Graz).

**Palamà, G.:** Teoremi relativi alle uguaglianze multigrade. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 366—394 (1947).

Verf. beweist: Das Bestehen eines Tarry-Escott-Systems (vgl. die Normierung der Bezeichnung in den vorsteh. Referaten über Arbeiten des Verf.)  $a_i \stackrel{x}{=} b_j$  hat bei  $x = 1, 3, \dots, 2n - 1$  das eines Systems

$$a_i + r, -b_j + r, -a_i + s, b_j + s \stackrel{2n+1}{=} a'$$

zur Folge, hingegen für  $x = 2, 4, \dots, 2n$

$$a_i + r, -a_i + r, b_j + s, -b_j + s \stackrel{2n+2}{=} a'.$$

Hierbei brauchen  $a_i$  und  $b_j$  nicht gleichdimensionale Vektoren zu sein,  $r$  und  $s$  sind beliebige voneinander verschiedene Zahlen. — Ein weiterer Teil der Arbeit ist der Umkehrung von Tarry-Escott-Sätzen gewidmet, d. h. der Frage, inwieweit die bei bisher gefundenen Sätzen neu gebildeten Systeme umgekehrt die Systeme der Voraussetzung nach sich ziehen. Holzer (Graz).

**Lehmer, D. H.:** On the partition of numbers into squares. Amer. math. Monthly 55, 476—481 (1948).

$P_k(n)$  bezeichne die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von  $n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$  mit  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$ . Wann  $P_k(n) = 0$  ist, ist seit langem bekannt. Verf. untersucht, wann  $P_k(n) = 1$  ist. —  $k = 2$ : Es gibt unendlich viele  $n$  mit  $P_2(n) = 1$ ; diese  $n$  hat bereits Euler alle angegeben.  $k = 3$ : Verf. gibt unendlich viele  $n$  mit  $P_3(n) = 1$  an; ob seine Liste vollständig ist, hängt von einer bisher unbewiesenen Vermutung über die Klassenzahl quadratischer Formen ab.  $k = 4$ : Verf. gibt unter Benutzung der Jacobischen Formel für die Darstellung



einer Zahl als Summe von 4 Quadraten alle  $n$  mit  $P_4(n) = 1$  und außerdem alle  $n$  mit  $P_4(n) = 2$  an; es gibt ja unendlich viele solche  $n$ .  $k \geq 5$  ist nahezu trivial; es gibt dann nur endlich viele  $n$  mit  $P_k(n) = 1$ , die alle angegeben werden. Für  $k \geq 7$  erfüllen genau  $n = 1, 2, 3$  die Bedingung  $P_k(n) = 1$ . Stöhr.

**Sprague, R.:** Über Zerlegungen in ungleiche Quadratzahlen. *Math. Z.* **51**, 289—290 (1948).

Verf. zeigt: Jede ganze Zahl  $> 128$  ist Summe von paarweise verschiedenen Zahlen aus einer Teilfolge der Quadratzahlen; es gibt unendlich viele Teilfolgen der Quadratzahlen mit dieser Eigenschaft. Der Beweis erfolgt in sehr einfacher Weise dadurch, daß eine genügend lange Folge aufeinanderfolgender Zahlen, von denen jede als Summe von paarweise verschiedenen Quadratzahlen  $< q^2$  darstellbar ist, durch Hinzufügen des Summanden  $q^2$  zu den Summendarstellungen zu einer längeren derartigen Folge ergänzt werden kann; dies Verfahren kann unbegrenzt iteriert werden. Stöhr (Hamburg).

**Bouwkamp, C. J.:** On the dissection of rectangles into squares. (Second communication). *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **50**, 58—71 (1947).

Verf. betrachtet die Zerlegungen von Rechtecken in Quadrate bzw. diejenigen ebenen Netzwerke, die nach der grundlegenden Arbeit von Brooks, Smith, Stone und Tutte [*Duke Math. J.* **7**, 312—340 (1940); dies. Zbl. **24**, 165] den Zerlegungen zugeordnet sind. Er gibt eine Aufstellung derjenigen ebenen Netzwerke mit höchstens 14 Drähten, bei denen keine zwei Drähte parallel oder in Serie liegen. Jedem Netzwerk wird eine „Komplexität“ zugeordnet, d. i. die Anzahl der im Netzwerk enthaltenen Bäume, die alle Knotenpunkte des Netzwerkes enthalten. Verf. gibt ohne Beweis an, daß die Komplexität auch als der gemeinsame Absolutbetrag aller ersten Unterdeterminanten einer gewissen dem Netzwerk zugeordneten Matrix bestimmt werden kann, sowie daß jedes einem Netzwerk zugeordnete Rechteck, das in Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen zerlegt ist, eine Summe der Seitenlängen besitzt, die in der Komplexität aufgeht. Verf. gibt ferner eine Tabelle aller „einfachen“ Rechteckszerlegungen in 9 bis 13 nichtverschwindende Quadrate (8 Druckseiten Umfang; eine Zerlegung heißt einfach, wenn keine echte Teilmenge der darin vorkommenden Quadrate bereits selbst ein Rechteck bildet). Stöhr.

**Bouwkamp, C. J.:** On the dissection of rectangles into squares. (Third communication). *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **50**, 72—78 (1947).

Verf. sucht in der in Teil II seiner Arbeit (s. vorstehendes Referat) mitgeteilten Tabelle Paare von kongruenten oder ähnlichen Rechtecken, die auf verschiedene Weise in Quadrate mit ganzzahligen teilerfremden Seiten zerlegt sind. U. a. findet er ein Paar von kongruenten Rechtecken, wo in beiden Zerlegungen zusammengekommen lauter verschiedene Quadrate auftreten, sowie ein Paar von kongruenten Rechtecken, wo in beiden Zerlegungen völlig die gleichen Quadrate auftreten, während bei jeder einzelnen dieser Zerlegungen diese Quadrate paarweise verschieden sind. Die vom Verf. für diese Vorkommnisse gegebenen Beispiele haben dabei die geringstmögliche Anzahl von Quadraten. — Verf. macht ferner einige Bemerkungen über die Konstruktion von Quadraten, die in lauter verschiedene Quadrate zerlegt sind; vgl. dazu die Berichtigungen in den beiden nachstehend referierten Arbeiten. Stöhr (Hamburg).

**Bouwkamp, C. J.:** On the construction of simple perfect squared squares. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **50**, 1296—1299 (1947).

Verf. gibt in ausführlicher Form eine Berichtigung seiner Bemerkungen über die Konstruktion von Quadraten, die in lauter verschiedene Quadrate zerlegt sind (s. vorsteh. Referat). Er berichtigt ferner einen Fehler in der in Teil II seiner Arbeit (s. oben) gegebenen Tabelle. Stöhr (Hamburg).

**Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte:** A simple perfect square. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **50**, 1300—1301 (1947).



Die Verf. hatten [Duke Math. J. 7, 312—340 (1940); dies. Zbl. 24, 165] ein Quadrat angegeben, das „kreuzungsfrei“ in paarweise verschiedene Quadrate zerlegt ist. Sie klären nun ein Mißverständnis, das Herrn Bouwkamp bei einer Kritik dieser Arbeit unterlaufen war (vgl. die beiden vorstehenden Referate). *Stöhr.*

**Richardson, A. R.:** The composition of cubic forms. Duke math. J. 14, 27—30 (1947).

Hier wird das Theorem von Gauß über die Duplikation der quadratischen Formen auf binäre kubische Formen erweitert. *Hofreiter (Wien).*

**Rankin, R. A.:** On sums of powers of linear forms. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 846—853 (1948).

Es seien  $L_1, \dots, L_n$   $n$  Linearformen in  $x_1, \dots, x_n$  mit einer Determinante  $D \neq 0$ . Es sei weiter

$$g_\beta = \left\{ \sum |L_i|^\beta \right\}^{1/\beta} \quad (1 \leq \beta \leq 2),$$

und es soll  $M_\beta = \text{Min } g_\beta$ , erstreckt über alle Gitterpunkte  $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , abgeschätzt werden. Der Minkowskische Fundamentalsatz liefert ja sofort eine Abschätzung. Verschärfungen dieser Abschätzung wurden angegeben von Blichfeldt, Hua, Mullender, Rankins und dem Ref. Dem Verf. gelingt es nun in interessanter Weise, die bisher erhaltenen Resultate weiter zu verschärfen. Er zeigt z. B. folgendes: Ist  $\delta$  eine beliebige Zahl mit  $\frac{1}{2} \leq \delta \leq \alpha \leq 1$ ,  $\delta = \frac{1}{3}(1 + a) < 1$ , wo  $\alpha \beta = 1$ , so ist

$$M_\beta \leq n^\alpha |D|^{1/n} A_5,$$

wo für großes  $n$

$$A_5 \sim 2^{1-\alpha} \left( \frac{2-\delta}{1-\delta} \right)^{\alpha-\delta} \left( \frac{e}{\delta} \right)^\delta \Gamma(1+\delta).$$

Ein bemerkenswertes Resultat ist noch folgendes: Es gibt ganze Zahlen  $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , so daß

$$|L_1 \dots L_n|^{1/n} < |D|^{1/n} / 3,6593.$$

Dies ist besser als das Resultat von Davenport, „The product of  $n$  homogenous linear forms“, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 2—8 (1946). *Hlawka (Wien).*

**Macheath, A. M.:** Non-homogeneous linear forms. J. London math. Soc. 23, 141—147 (1948).

Sind  $L_1 = ax + by + e$ ,  $L_2 = cx + dy + f$  zwei reelle lineare Formen und ist  $ad - bc = 1$ , so gibt es nach Minkowski ganze Zahlen  $x, y$ , so daß für sie  $|L_1 L_2| \leq \frac{1}{4}$ . Der Verf. gibt für diesen bereits mehrfach bewiesenen Satz zwei weitere geometrische Beweise, die mit den Beweisen von Mordell und Chalk verwandt sind.

*Hofreiter (Wien).*

**Blaney, Hugh:** Indefinite quadratic forms in  $n$  variables. J. London math. Soc. 23, 153—160 (1948).

Bekanntlich gibt es zu jeder indefiniten binären quadratischen Form  $Q(x, y)$  und zu beliebigen reellen Zahlen  $x_0, y_0$  ganze Zahlen  $x, y$ , so daß

$$|Q(x + x_0, y + y_0)| \leq \frac{1}{4} |\Delta| \quad (\Delta = \text{Diskriminante von } Q).$$

Verf. beweist: Es gibt eine Zahl  $l_n$ , z. B.  $l_n = 2^{n-2}$ , und ganze Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so daß für jede indefinite quadratische Form  $Q$  und beliebige reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$|Q(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)| \leq l_n |D|^{1/n}$$

( $D = \text{Determinante von } Q$ ) ist. Noch allgemeiner gilt:

$$\gamma |D|^{1/n} < Q(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) \leq \Gamma |D|^{1/n}.$$

Dabei ist  $\Gamma$  zu gegebenem  $\gamma$  bestimmbar. Für homogene Formen gilt eine analoge Approximation, und zwar

$$c |D|^{1/n} < Q(x_1, \dots, x_n) \leq C |D|^{1/n}. \quad \text{Hofreiter (Wien).}$$



**Ollerenshaw, Kathleen:** On the minima of indefinite quadratic forms. J. London math. Soc. **23**, 148—153 (1948).

Ist  $f$  eine indefinite, binäre quadratische Form mit der Determinante  $d$ , so gilt für das Minimum  $M(f) \leq \sqrt{-d/5}$ . Für alle Formen  $f$ , die nicht äquivalent mit  $C \cdot (x^2 - xy - y^2)$  sind, gilt sogar  $M(f) \leq \sqrt{-d/8}$ . Dabei gilt das  $=$ -Zeichen nur für die mit  $C \cdot (x^2 - 2xy - y^2)$  äquivalenten Formen. Für diesen bekannten Satz gibt die Verf. einen geometrischen Beweis, der auf den Eigenschaften nichtbeschränkter Sternbereiche beruht. Hofreiter (Wien).

**Heilbronn, H.:** On the distribution of the sequence  $n^2\theta \pmod{1}$ . Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **19**, 249—256 (1948).

Für jede ganze Zahl  $N \geq 1$  und jede reelle Zahl  $\theta$  können ganze Zahlen  $n$  und  $g$  so gefunden werden, daß

$$1 \leq n \leq N \quad \text{und} \quad |n^2\theta - g| \leq c(\eta) N^{-1/2+\eta}.$$

Dabei ist  $\eta$  eine beliebig kleine positive Zahl und  $c(\eta)$  hängt nur von  $\eta$  ab. Damit wurde die von Vinogradov gefundene Abschätzung  $(N^{-2/5+\eta})$  etwas verbessert.

Hofreiter (Wien).

## Analysis.

### Allgemeines:

● **Thompson, S. P.:** Höhere Mathematik und doch verständlich. 7. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1949. V, 238 S.

● **Asmus, E.:** Einführung in die höhere Mathematik und ihre Anwendungen. Ein Hilfsbuch für Chemiker, Physiker und andere Naturwissenschaftler. (Sammlung „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“.) Berlin: W. de Gruyter 1947, XV, 400 S., 178 Abb.

Viele Beispiele aus der Chemie sollen den Hintergrund für eine Einführung in die Höhere Mathematik bilden. Diese aber enthält ebenso viele schwerwiegende wie grundlegende Mißverständnisse, so daß sie nicht einmal angesichts des beschränkten Zieles ernst genommen werden kann. Zahlreiche Aperçus des Verf. verraten, worüber er sich nie klar geworden ist; seine Sprache ist logisch ungenau und führt in die Irre; die Herleitung einfacher Formeln unnütz, umständlich oder zirkelhaft (!); das Ganze verzieht Studenten einer exakten Naturwissenschaft zur Unexaktheit. Ulrich (Gießen).

● **Salvadori, M. G. and K. S. Miller:** The mathematical solution of engineering problems. New York, McGraw-Hill 1948. X, 245 pp. \$ 3,50.

### Mengenlehre:

**Sierpiński, Waclaw:** Sur les translations des ensembles linéaires. Fundam. Math., Warszawa **35**, 159—164 (1948).

Ist  $E$  eine nichtleere Menge einer Geraden  $g$ , so wird nach der Anzahl  $\bar{F}(E)$  der verschiedenen Mengen auf  $g$  gefragt, die durch Translation mit  $E$  zur Deckung gebracht werden können. Ist  $E$  die ganze Gerade, so ist die Anzahl 1, sonst aber unendlich (zum Beweis wird die Hamelsche Basis verwendet). Für jede gegebene unendliche Zahl  $m \leq$  der Mächtigkeit des Kontinuums gibt es eine Menge  $E$  mit  $\bar{F}(E) = m$ . Ist  $F(E)$  abzählbar unendlich, so ist  $E$  nicht meßbar. H. Hornich (Graz).

**Sierpiński, W.:** Sur un problème de M. N. Lusin. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **4**, 519—520 (1948).

In einer Note von Lusin (dies. Zbl. **29**, 347) wurde das folgende Problem gestellt: Gibt es zwei zueinander orthogonale Mengen von Teilmengen der natürlichen Zahlen, die nichtseparabel sind und die Mächtigkeiten  $\aleph_0$  und  $\aleph_1$  haben? Verf. zeigt durch ein einfaches Beispiel, daß die Frage in positivem Sinne zu beantworten ist.

Ackermann (Lüdenscheid).



**Rindung, Ole: Ein Satz über additive Mengenfunktionen.** Mat. Tidsskr. B, København 1948, 24—28 (1948) [Dänisch].

Verf. bezeichnet ein Mengensystem  $S$  (eines beliebigen Raumes) als „Initialsystem“, wenn die leere Menge  $O$ , sowie mit  $A_1, A_2$  auch  $A_1 A_2$  zu  $S$  gehört, und wenn bei der Summenbildung von Elementen  $A_v \in S$  aus  $A_1 + \dots + A_n = A \in S$  schon  $A = A_v$  für wenigstens ein  $v = 1, \dots, n$  folgt;  $S$  heißt „Körper“, wenn es additiv und subtraktiv ist. Verf. beweist: Eine willkürliche endliche Mengenfunktion  $\mu$ , die auf einem Initialsystem  $S$  mit  $\mu(O) = 0$  erklärt ist, kann auf eine und nur eine Art fortgesetzt werden zu einer additiven Mengenfunktion  $\nu$ , welche auf dem kleinsten  $S$  enthaltenden Körper erklärt ist. *Egon Ullrich* (Gießen).

## **Differentiation und Integration reeller Funktionen:**

● **Locher-Ernst, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen.** Basel: Birkhäuser 1948. 594 S. m. 406 Fig. 48.—sfr.

Das Buch gibt, wie der Verf. im Geleitwort sagt, eine Einführung (auch in die analytische Geometrie), mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen und in Verbindung mit einem umfassenden Übungsmaterial (1007 Aufgaben mit Lösungen). „Es wurde angestrebt, den gesamten Stoff von Grund auf sachlich und pädagogisch neu durcharbeiten und — wenigstens teilweise — in neuartiger Form vorzutragen“. „Die grundlegenden Begriffe werden nicht ein für alle Male abgehandelt“, vielmehr zunächst „ohne Belastung durch scharfe Kritik an einfachen Beispielen erläutert“ und „erst nach Erwerb eines gewissen Könnens“ streng entwickelt. „Es wäre dem Verf. nicht unerwünscht, wenn der allzu einseitige, abstrakte Mathematiker fände, in diesem Buche werde zuviel mit bestimmten Zahlen gerechnet und zuviel graphisch operiert“. „Auch nicht unerwünscht wäre das Urteil des einseitigen Routiniers, der fände, hier werde allzu strenge Mathematik getrieben“. Sehr verdienstlich ist nach Ansicht des Ref., daß im Rahmen des numerischen und graphischen Rechnens auch Dinge wie z. B. Differenzenschema und Interpolation, Fehlerabschätzungen bei linearer und quadratischer Interpolation in Tafeln klar und ausführlich besprochen werden, Dinge, die man leider in derartigen Lehrbüchern sonst nicht findet. Begrüßenswert ist ferner, daß „Unannehmlichkeiten, denen man gerne ausweicht“, nicht umgangen werden, wie z. B. Maßstabsfragen oder Abschätzungen der Gültigkeitsgrenzen von Näherungsformeln. Auch daß Verf. dem Differential zu seinem Recht verhelfen will, ist erwähnenswert. Die historischen Notizen am Schlusse seien nicht vergessen. So scheint die Absicht des Verf. aufs beste erreicht. Das Buch kann als einführendes Unterrichtsmittel nur empfohlen werden und wird auch dem Studierenden der theoretischen Mathematik vieles Wissenswerte zu bieten haben. Über Einzelheiten kann man des ungeachtet natürlich verschiedener Meinung sein, wie etwa über die Art der Einführung des Differentials. Unter den angegebenen weiterführenden Werken dürfte das Buch von Serret-Scheffers einen Vergleich mit den gleichzeitig genannten Werken von A. Ostrowski und R. Rothe nicht mehr aushalten. Der Beweis S. 180 unten bedarf infolge eines Reche fahlers der Abänderung. Bei einer Neuauflage könnten vielleicht auch Fragen der Nomographie gestreift oder wenigstens die Darstellung von Funktionen durch Skalen erwähnt werden, die ja auch Anlaß zu Genauigkeitsbetrachtungen liefern. Inhalt: 1. Koordinatensysteme, 2. Winkel, Strecke und Gerade im rechtwinkligen Koordinatensystem, 3. Differenzieren, Integrieren und Interpolieren im Gebiete der ganzen rationalen Funktionen, 4. Differenzieren im Gebiete der elementaren Funktionen, 5. Integralrechnung, 6. ebene Kurven; Ausblick in das Gebiet der Differentialgleichungen. Tafeln der Exponentialfunktion und Hyperbelfunktionen (5-stellig), sowie der elliptischen Integrale (4-stellig). Formelsammlung. Historische Notizen von Dr. J. O. Fleckenstein. *Haupt* (Erlangen).

● **Ritt, Joseph Fels: Integration in finite terms: Liouville's theory of elementary methods.** New York: Colombia University Press; London: Oxford University Press 1948. IX, 100 p. 15 s. net.

In fast allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung wird zwar erwähnt, daß Funktionen wie  $x^{-1}e^x$  von Liouville als nicht elementar integrierbar nachgewiesen sind. Will man jedoch nicht zu Liouvilles Originalabhandlungen greifen, so findet man kaum irgendwo eine Darstellung dieser z. T. sehr reizvollen Theorie. Das dem Referenten vorliegende Buch scheint das erste zu sein, welches in moderner Weise Liouvilles Resultate und neuere Ergebnisse von Mordukhai-Boltovskoi, Ostrowski und dem Verf. wiedergibt. Das für jeden Mathematiker interessante Buch dürfte bereits für Studenten höherer Semester ohne Schwierigkeiten lesbar sein. — Der Begriff der elementaren Funktion und die Ordnung einer



solchen Funktion werden nach dem Vorgange von Liouville im 1. Kapitel erläutert (z. B. ist  $\log \log \log x$  von der Ordnung 3). Außer einfachen Sätzen (jede Ableitung elementarer Funktionen ist elementar usw.) wird besonders das wesentlich auf dem Ordnungsbegriff beruhende Beweisprinzip von Liouville entwickelt. In dem 2. Kapitel wird der Liouvillesche Satz bewiesen, der besagt: Ist  $y$  algebraisch und  $\int y dx$  elementar, so ist

$$(1) \quad \int y dx = v_0 + c_1 \log v_1 + \cdots + c_r \log v_r, \quad v_i = v_i(x) \text{ algebraisch.}$$

Mit seiner Hilfe wird gezeigt, daß die elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung elementar sind. Das Integral  $\int x^p (1-x)^q dx$ ,  $p, q$  rational, ist nur dann elementar, wenn  $p$  oder  $q$  oder  $p+q$  ganz ist. Nach einer Methode von Ostrowski wird im Kapitel 3 ein dem Liouvilleschen entsprechender wesentlich allgemeinerer Satz bewiesen. Deutlich spürt man an dieser Stelle den Einfluß der modernen abstrakten Algebra. So werden „Differentialkörper“ von Funktionen und deren Erweiterungen betrachtet (an Stelle von elementaren Funktionen wachsender Ordnung). Aus dem erwähnten Satz folgt insbesondere: Ist  $y$  elementar und  $\int y dx$  elementar, so gilt dieselbe Formel (1) wie oben, nur bedeuten die  $v_i$  nun Funktionen, welche als algebraische Funktionen der „Bausteine“ von  $y$  aufgefaßt werden können. Als Anwendung ergibt sich u. a. das (schon Liouville bekannte) Resultat:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\log x} \quad \text{sind nicht elementar.}$$

Im Kapitel 4 wird gezeigt:  $y - a \sin y = x$  hat keine elementare Lösung. Allgemein wird die Struktur derjenigen elementaren Funktionen untersucht, die Umkehrfunktionen von elementaren Funktionen sind. — Schließlich behandeln die 3 letzten Kapitel im wesentlichen Problemstellungen, die mit der Auflösung von Differentialgleichungen durch Quadraturen zusammenhängen. Die Behandlungsmethoden sind von ähnlichen Ideen getragen wie die in den ersten Kapiteln. An die Stelle der elementaren Funktionen treten die allgemeineren Liouville-Funktionen, welche in ähnlicher Weise wie die elementaren Funktionen gebildet werden, nur daß noch bei ihrem Aufbau Integrationen zugelassen sind. Ist eine Differentialgleichung durch Quadraturen lösbar, so heißt dies, daß sie durch Liouville-Funktionen gelöst werden kann. Es gilt das Liouvillesche Theorem: Wenn  $y' + y^2 = P(x)$  ( $P$  algebraisch) als spezielle Lösung eine Liouville-Funktion besitzt, dann besitzt die Gleichung auch eine spezielle algebraische Lösung. Dieser Satz gestattet Anwendung auf die Riccatische und die Besselsche Gleichung. — Satz von Mordukhai-Boltovskoi: Wenn  $y' = f(x, y)$  ( $f$  algebraisch) eine elementare Lösung  $g(x, y) = c$  besitzt (d. h.  $g$  elementare Funktion von 2 Variablen), so hat die Gleichung die Lösung

$$\varphi_0(x, y) + a_1 \log \varphi_1(x, y) + \cdots + a_r \log \varphi_r(x, y) = c$$

mit  $\varphi_i$  algebraisch. Hieraus werden weitere Folgerungen gezogen. — Im letzten Kapitel werden Resultate des Verf. hergeleitet, so z. B.: Ist  $y(x)$  elementar,  $w = \int y dx$  und  $F(w, x) = 0$  mit elementarem  $F$ , so ist  $w$  elementar. Hieraus wird gefolgert, daß die elliptischen Funktionen nicht elementar sind, da die elliptischen Integrale nicht elementar sind. — Weiter: Falls die Lösung  $w$  von  $w'' = \varphi(x)w$  (mit  $\varphi =$  Liouville-Funktion) einer Gleichung  $F(w, x) = 0$  genügt, wobei  $F$  wieder Liouville-Funktion (von zwei Variablen) ist, dann ist  $w$  Liouville-Funktion.

W. Maak (Hamburg).

**Burkill, J. C.:** Differential properties of Young-Stieltjes integrals. J. London math. Soc. 23, 22—28 (1948).

**Definitionen.** Es sei  $g(J)$  eine Intervallfunktion (d. h. eindeutig, reell und endlich über dem Körper der Intervalle  $J$ ) auf der reellen Zahlgeraden  $E_1$ , und es sei  $|J|$  das Maß von  $J$ . Dann heiße  $g(J)$  stetig in einem Intervall  $R$ , wenn  $|g(J)| < \varepsilon$  für jedes  $J \subset R$  mit  $|J| < \eta(\varepsilon)$ , ferner komplett (completely) stetig in  $R$ , wenn



$|g(J') - g(J'')| < \varepsilon$  für alle  $J', J'' \subset R$  mit  $|J' + J'' - J'J''| < \delta(\varepsilon)$  (wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig). Weiter heiße  $g(J)$  approximativ additiv in  $R$ , wenn für jede Darstellung von  $J \subset R$  als Vereinigung endlich vieler, nicht übereinandergreifender Intervalle  $J_1, \dots, J_n$  gilt  $|g(J) - (g(J_1) + \dots + g(J_n))| < \varepsilon \cdot |J|$  für  $|J| < \xi(\varepsilon)$ ; gilt dies nur für den Fall, daß die  $J_1, \dots, J_n$  alle gleich sind, so heiße  $g(J)$  approximativ additiv für gleiche Teile, kurz gl. approximativ additiv. — Sätze. (1) Ist  $g(J)$  komplett stetig und gl. approximativ additiv, so gilt: (1, 1) Es existiert (und es ist endlich) das Burkillintegral  $G(R) = \int_R g(J)$ ; (1, 2) zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta^*(\varepsilon) > 0$  mit  $|G(J) - g(J)| < \varepsilon \cdot |J|$  für  $|J| < \delta^*(\varepsilon)$ . — (2) Es seien  $f(x), \Phi(x)$  stetige (reelle) Punktfunktionen im Intervall  $(a, b)$ ; ferner sei gesetzt  $q(t; f) = \sup(|f(x') - f(x'')|; |x' - x''| \leq t)$ . Konvergiert dann  $\int_0^x t^{-2} q(t; f) q(t; \Phi) dt$ , so existiert das

(Riemann-Stieltjes-)Integral  $\int_b^a f d\Phi$ , und zwar als Limes der  $\sum f(x'_v)(\Phi(x_v) - \Phi(x_{v-1}))$  mit  $x_{v-1} \leq x'_v \leq x_v$ , wenn  $\max(x_v - x_{v-1}) \rightarrow 0$ . [Zum Beweise wird gezeigt:

$g(J) = f(x_v - 1)(\Phi(x_v) - \Phi(x_{v-1}))$  genügt der Vor. von (1, 1).] — (3) Ist  $F(x) = \int_a^x f d\Phi$

im Sinne von (2), dann existiert zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  ein  $\tilde{\delta}(\varepsilon)$  mit  $F(x+h) - F(x) = f(x)(\Phi(x+h) - \Phi(x)) + \varepsilon' \cdot h$  und  $|\varepsilon'| < \varepsilon$ , wenn  $|h| < \tilde{\delta}(\varepsilon)$ . — (4) Es seien  $f(x), \Phi(x), f_n(x), \Phi_n(x)$  stetig in  $(a, b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; ferner sei  $f(x) = \lim_n f_n(x)$ ,  $\Phi(x) = \lim_n \Phi_n(x)$ ; schließlich sei  $|f_n(x+h) - f_n(x)| \leq q(h; f)$  und  $|\Phi_n(x+h) - \Phi_n(x)|$

$\leq q(h; \Phi)$ . Dann gilt  $\int_a^b f_n d\Phi_n \rightarrow \int_a^b f d\Phi$  für  $n \rightarrow \infty$ . — Die Untersuchung läßt sich auf den Fall des  $E_n$  mit  $n \geq 2$  ausdehnen. Der Beweis für die Existenz von  $\int f d\Phi$  wird (unter den in (2) gemachten Annahmen über  $f$  und  $\Phi$ ) anders als bei L. C. Young [Acta math., Uppsala 67, 251—282 (1936); Math. Ann., Berlin 115, 581—612 (1938); dies. Zbl. 16, 104; 19, 15] bewiesen, nämlich ohne Heranziehung tieferliegender Ungleichungen. (3) findet sich bisher in der Literatur nicht. *Haupt.*

**Eggleston, H. G.:** The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 31—36 (1949).

Carathéodory gab zuerst eine befriedigende Definition des  $s$ -dimensionalen Maßes von Mengen, die in einem  $q$ -dimensionalen Raum eingebettet sind ( $s$  und  $q$  natürliche Zahlen). Nun gibt es Mengen, die man in gewissem Sinne als zwischen Mengen mit Maßen zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden, ganzzahligen Dimensionen gelegen ansehen kann. Mengen dieser Art hat zuerst F. Hausdorff [Math. Ann., Berlin 79, 157—179 (1919)] in seiner Arbeit „Dimension und äußeres Maß“ näher untersucht und als Mengen mit gebrochener Dimension bezeichnet. Weitere hierhergehörige Untersuchungen stellte später A. S. Besicovitch [Math. Ann., Berlin 101, 161—193 (1929); 110, 321—330, 331—335 (1934); dies. Zbl. 9, 395; 10, 14] und V. Kníchal [Mém. Soc. sci. Bohême, Cl. Sci. 14, 1—18 (1934); Časopis mat. fys. 65, 195—209 (1936); dies. Zbl. 14, 257] an. — Verf. bringt nun den Beweis eines von I. J. Good [Proc. Cambridge philos. Soc. 37, 200 (1941)] nur vermutungsweise ausgesprochenen Theorems über die gebrochene Dimension der folgendermaßen definierten (linearen) Punktmenge: Bedeutet  $P(x, i, r)$  mit  $x \in [0, 1]$  die Anzahl der Fälle, in welchen bei der Systembruchentwicklung von  $x$  mit der Basis  $N$  ( $N =$  eine festgehaltene, natürliche Zahl  $\geq 2$ ) die Ziffer  $r$  in den  $i$  ersten Stellen auftritt, so soll unter  $S$  die Menge aller  $x \in [0, 1]$  verstanden werden, die den Bedingungen  $\lim_{i \rightarrow \infty} P(x, i, r)/i = p_r$ ,  $0 \leq p_r \leq 1$  und

$\sum_0^{N-1} p_r = 1$  für  $r = 0, 1, \dots, N-1$  zugleich genügen. Erklärt man dann als gebrochene Dimension  $\alpha$  von  $S$  jene reelle Zahl  $\alpha$ , für welche gilt:  $\Lambda_\beta(S) = 0$  für  $\beta > \alpha$ ,  $\Lambda_\beta(S) = \infty$  für  $\beta < \alpha$ , worin  $\Lambda_\beta(S) = \lim$  (untere Grenze  $\sum_{U(S, \delta)} d^\beta$ ) bedeutet, die  $U(S, \delta)$   $S$  überdeckende Intervallsysteme mit der maximalen Intervalllänge  $< \delta$  sind und jede Summe  $\sum_{U(S, \delta)} d^\beta$  über sämtliche Glieder von  $U(S, \delta)$  zu bilden ist, so lautet das Theorem von I. J. Good: „Für die gebrochene Dimension  $\alpha$  von  $S$  gilt die Beziehung  $N^{-\alpha} = \prod_{r=0}^{N-1} p_r$ .“ Verf. bringt den Beweis für dieses Theorem für den Fall, daß alle  $p_r \neq 0$  sind, bemerkt aber, daß er sich ähnlich auch, wenn einige der  $p_r$  verschwinden, führen lasse. *Hermann Wendelin* (Graz).

**Boas jr., R. P. and K. Chandrasekharan:** Derivatives of infinite order. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 523—526 (1948).

Im Gedankenkreis der quasianalytischen Funktionen gelangen Verf. zu Ergebnissen wie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} f^{(n)}(x) = g(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b$$

bewirken gleichmäßig in  $x$ :  $g(x) = 0$ . Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} |\lambda_n|^{1/n} < \infty$  folgt für  $a < x < b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} f^{(n)}(x) = k e^{bx}.$$

*Wilhelm Maier* (Jena).

## Allgemeine Reihenlehre:

**Wintner, A.:** Arithmetically monotone sequences. Bull. Ecole Polytechn. Jassy **2**, 3—9 (1947).

F. Hausdorff [Summationsmethoden und Momentfolgen, I und II, Math. Z. **9**, 74—109, 280—299 (1921)], macht die Matrix  $(a_{pq})$  mit  $a_{pq} = (-1)^q \binom{p}{q}$  zum Ausgangspunkt seiner Theorie der vollmonotonen Folgen. Verf. will ein arithmetisches Gegenstück dieser Hausdorffschen Theorie entwickeln und geht hierzu von den  $D$ -Matrizen von O. Toeplitz [Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Amer. J. Math. **60**, 880—888 (1930)] aus, insbesondere von der Matrix  $(\alpha_{pq})$  mit  $\alpha_{pq} = \mu \left( \frac{p}{q} \right)$ , wo unter  $\mu(x)$  ( $= 0$  für nichtganzzahliges  $x$ ) die Möbiussche Funktion verstanden wird. Als Analagon der Definition der Vollmonotonie:  $\sum_{v=0}^p a_{pv} \lambda_{q+v} \geq 0$  erscheint jetzt die Definition der  $D$ -Monotonie:  $\sum_{q/v/p} \alpha_{qv} \lambda_v \geq 0$  ( $p, q = 1, 2, \dots$ ), oder  $\sum_{v/k} \mu(v) \lambda_{v \cdot q} \geq 0$  ( $k, q = 1, 2, \dots$ ). Für jedes  $x \geq 0$  ist die Folge  $1^{-x}, 2^{-x}, \dots$   $D$ -monoton. Hinreichend für Vollmonotonie der Folge  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  ist die Lösbarkeit des Momentenproblems  $\lambda_n = \int_0^\infty x^n d\chi(x)$ . Ob diese Bedingung auch notwendig ist, bleibt offen. *R. Schmidt* (München).

**Leja, F.:** Sur les suites monotones en moyenne. Ann. Soc. Polonaise Math. **19**, 133—139 (1947).

Die Monotonieforderung wird durch verschiedene schwächere ersetzt, z. B.  $k^{-1}(a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k-1}) \leq a_{n+k}$  bei festem  $k$  für jedes  $n$ , oder  $k^{-1}(a_{v_1} + \dots + a_{v_k}) \leq a_{v_1 + \dots + v_k}$  bei festem  $k$  für beliebige  $v_1, \dots, v_k$ . Die Konvergenz von  $a_1, a_2, \dots$  gegen einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert bleibt gesichert. *R. Schmidt*.

**Basu, S. K.:** On the total relative strenght of the Hölder and Cesàro methods. Proc. London math. Soc., II. s. **50**, 447—462 (1948).



A method of summation  $A$  is said to be totally included in another method  $B$  if every sequence  $A$ -summable to  $l$  ( $-\infty \leq l \leq +\infty$ ) is also  $B$ -summable to  $l$ . For the Cesàro and Hölder methods the author shows that  $C_\alpha$  is totally included in  $H_\alpha$  for  $-1 < \alpha < 0$  and  $\alpha > 1$ , and  $H_\alpha$  in  $C_\alpha$  for  $0 < \alpha < 1$ . The converse is not true even if the order  $\alpha$  of the weaker method is replaced by some constant  $\beta > \alpha$  belonging to the interval in question. The condition for the total regularity

of a Hausdorff method with the mass function  $\mu(t) = \int_0^1 w^t dg(t)$  being

(1)  $(-1)^n \mu^{(n)}(t) \geq 0$ , the author proves his theorems by examining the validity of condition (1) for such matrices as  $C_\alpha(H_\beta)^{-1}$ . *G. G. Lorentz (Toronto).*

**Upadhyay, S. D. and P. N. Das Gupta:** On a generalised continued fraction. *Bull. Calcutta math. Soc.* **39**, 65—70 (1947).

Verff. betrachten Kettenbrüche, deren Glieder wiederum Kettenbrüche sind, geben Rekursionsformeln für die Näherungsbrüche, die entstehen, wenn man den Kettenbruch an  $k$ -ter Stelle, die einzelnen Glieder an  $r_1$ -ter,  $r_2$ -ter, ...,  $r_k$ -ter Stelle abbricht, und zeigen, daß durch Verwendung zweireihiger Matrizen im Falle  $k = r_1 = r_2 = \dots = r_k$  übersichtliche Darstellungen möglich sind. *Specht.*

**Chatterjee, Anunoy:** On a continued fraction of a general type. *Bull. Calcutta math. Soc.* **40**, 69—75 (1948).

Verf. führt die Untersuchungen von S. D. Upadhyay und P. N. Das Gupta (vgl. vorstehendes Referat) fort und gibt u.a. eine Matrixdarstellung des Näherungsbruches im allgemeinen Falle, daß der Kettenbruch von Kettenbrüchen an  $k$ -ter Stelle, die einzelnen Glieder an  $r_1$ -ter,  $r_2$ -ter, ...,  $r_k$ -ter Stelle abgebrochen werden. *Specht (Erlangen).*

**Myrholm, A. M. S.:** Über die Rektifikation der Ellipse. *Mat. Tidsskr. A. København* **1948**, 47—61 (1948) [Dänisch].

Zwei Reihen für die Bogenlänge einer Ellipse werden hergeleitet, die rascher konvergieren als die bekannte Reihe von Euler. Die eine der Reihen ist schon 1796 von Ivory gefunden, aber in der Literatur seitdem nicht bewiesen und kaum beachtet. — Es handelt sich um die Reihen (die Eulersche zum Vergleich)

$$E = 2\pi a \left\{ 1 - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v-1} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2v-1}{2v} \right)^2 e^{2v} \right\}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (\text{Euler})$$

$$E = \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)} \left\{ 1 - \frac{1}{4^2} c^2 - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{8^2} c^4 - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{8^2} \cdot \frac{7 \cdot 9}{12^2} c^6 - \dots \right\}, \quad c = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{Myrholm})$$

$$E = \pi(a+b) \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 k^4 + \dots + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2v-3}{2v} \right)^2 k^{2v} + \dots \right\},$$

$$k = \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{Ivory})$$

Alle sind auch am Rande  $b = 0$ ,  $e = c = k = 1$  konvergent. *Egon Ullrich.*

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Pagni, Mauro:** Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. **5**, 363—368 (1948).

In anderer Weise als bei der auf Bessel-Reihen führenden Arbeit des Ref. [*Math. Z.* **47**, 655—662 (1942); dies. Zbl. **26**, 211] behandelt hier Verf. das allgemeinere Problem der Fourierreihen mittelbarer Funktionen  $f(x(t))$  folgendermaßen: Es seien  $a_r, b_r$  die Kosinus- und Sinus-Koeffizienten der Fourierreihe für die Funktion  $f(x) = f(x + 2\pi)$ , in Zeichen:  $f(x) \sim \{a_r, b_r\}$ . Ebenso gelte über  $t$ :

$$x(t)^k \sim \{c_n^{(k)}, d_n^{(k)}\}; \quad \cos rx(t) \sim \{\gamma_n, \delta_n\}; \quad \sin rx(t) \sim \{\bar{\gamma}_n, \bar{\delta}_n\}; \quad f(x(t)) \sim \{\alpha_n, \beta_n\}.$$

Verf. gibt die Formeln für die gesuchten Koeffizienten  $\alpha, \beta$  als Funktion von  $a, \gamma, \bar{\gamma}$  bzw. von  $a, \delta, \bar{\delta}$ . Darin sind einzusetzen die ebenfalls angegebenen Formeln für  $\gamma$ .

und  $\bar{y}$  als Funktion der  $c^{(k)}$  und die für  $\delta$  und  $\bar{\delta}$  als Funktion der  $d^{(k)}$ . Hat ferner  $y = f(x) = f(x + 2\pi) - 2\pi$  die Umkehrung  $x = \varphi(y) \sim \{c, d\}$ , so gibt Verf. dazu  $c, d$  als Funktion der nullten Fourier-Koeffizienten (d. h. Mittelwerte) von  $f(x)^k$ . Nicht aufgeführt werden die Formeln für den Zusammenhang der Fourierkoeffizienten der höheren Potenzen  $x(t)^k$  oder  $f(x)^k$  mit den Koeffizienten der Funktionen  $x(t)$  oder  $f(x)$  selbst; dafür wird auf die Formel für das Produkt von von 2 Fourierreihen verwiesen. — Als Voraussetzung für die Gültigkeit der Formeln wird beschränkte Variation der betr. Funktionen angenommen. *Bödewadt.*

**Gebelein, Hans:** Einige Bemerkungen über die Orthogonalpolynome zu einem endlichen Intervall mit einer vorgeschriebenen Belegung. Z. angew. Math. Mech. 29, 27—31 (1949).

Es gehöre  $p_n(x) = x^n + \dots$  im Intervall  $(-1, +1)$  zur Belegungsfunktion  $w(x)$ . Verf. teilt einige Ergebnisse mit, durch die das Verhalten von  $p_n(x)$  im Orthogonalitätsintervall für große  $n$  einfach gekennzeichnet wird. Denkt man sich beispielsweise die zu  $p_n(x)$  gehörende Kurve gezeichnet, die bekanntlich einen Wellenzug darstellt, so gilt für deren Amplitude das Gesetz  $\text{Ampl}(p_n(x) \sqrt{w(x)}) = C(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Setzt man  $x = \cos \varphi$ , so gilt für die Nullstellen des Polynoms, als Funktion von  $\varphi$  aufgefaßt, asymptotisch die Formel

$$p_n(\varphi) \sqrt{w(\varphi) \sin \varphi} = C \cos(A\varphi + B).$$

Eine weitere Grenzformel klärt das Verhalten von  $p_n(x)$  an den Rändern des Intervalls  $(-1, +1)$ . — Die Beweise gründen sich auf die bekannte Eigenschaft der  $p_n(x)$ , das Integral  $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) w(x) dx$  ( $P_n$  ein mit  $x^n$  beginnendes Polynom  $n$ -ten Grades) zu einem Minimum zu machen, sind aber nicht ausgeführt.

*W. Hahn* (Berlin).

### Funktionentheorie:

**Castellaneta, Veneranda:** Su talune diseguaglianze generali della teoria delle funzioni. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 513—516 (1947).

Aus dem Cauchyschen Integralsatze folgt unmittelbar — und zwar noch einfacher als es Verf. angibt — „Wenn  $0 < r < R$ , und wenn  $f(z) \equiv 0$  eine in  $|z| \leq R$  reguläre Funktion ist mit  $f(0) = 0$ , so ist  $\frac{M(r)}{M(R)} \leq \frac{r}{R-r}$ .“ Einige weitere Aussagen sind Abschwächungen dieser Abschätzung. *R. Schmidt* (München).

**Weigand, Leonhard:** Über die Randwerte meromorpher Funktionen einer Veränderlichen. Comment. math. Helvetici 22, 125—149 (1949).

Verf. gibt für die in  $|z| < 1$  meromorphe Funktion  $f(z)$  die genaue Definition der zum Randpunkt  $\zeta_0$  gehörigen abgeschlossenen Punktmenge  $H$  an, welche Menge, grob gesagt, die Menge der radialen Grenzwerte von  $f(z)$  in einem verschwindenden Bogen um  $\zeta_0$  approximiert. Als Umkehrung eines Satzes von Carathéodory [Comment. math. Helvetici 19, 263 (1946)] zeigt er die Existenz eines  $G(z)$  zu beliebig vorgegebenem  $H$ . Zerfällt die Komplementärmenge von  $H$  in die Gebiete  $G_1, G_2, \dots$ , so kann überdies von einer beliebigen Menge der  $G_v$  verlangt werden, alle Punkte  $w$  derselben seien Randwerte in  $\zeta_0$  ( $\lim_{v \rightarrow \infty} f(\zeta_v) = w$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \zeta_v = \zeta_0$ ), während keine Punkte der übrigen  $G_v$  diese Eigenschaft besitzen, jedoch mit der Einschränkung, daß alle mehrfach zusammenhängenden Gebiete zu jener Gebietsklasse gehören müssen. *G. af Hällström* (Åbo).

**Boas jr., R. P.:** Basic sets of polynomials. I. Duke math. J. 15, 717—724 (1948).

Die Untersuchung betrifft solche Polynomfolgen  $p_n(z)$ , daß jedes vorgegebene Polynom sich als endliche Linearkombination aus Elementen der Folge darstellen



läßt. Eine solche Folge heißt effektiv in  $|z| < R$ , wenn jede daselbst reguläre Funktion sich ebenda als unendliche Summe  $\sum a_n p_n(z)$  darstellen läßt. Kann jede ganze Funktion einer gewissen Klasse als eine solche überall konvergierende Reihe dargestellt werden, so ist die Polynomfolge in bezug auf diese Klasse effektiv. Verf. gibt gewisse Koeffizientenbedingungen für die  $p_n(z)$ , welche ihre Effektivität in  $|z| < R$  garantiert. Andererseits beweist er die Effektivität der Folge  $p_n(z)$  in bezug auf ganze Funktionen von beschränkter Wachstumsordnung und Typus, wenn eine verwandte Folge in  $|z| \leq 1$  effektiv ist. Die Kombination dieser Sätze ergibt mehrere Aussagen über Effektivität in bezug auf Klassen ganzer Funktionen, wenn Koeffizientenbedingungen gegeben sind (u. a. folgen frühere Ergebnisse von Whittaker und Eweida). Zentrale Hilfsmittel waren eine erweiterte Transformation von Pólya und ein Satz von Paley und Wiener. *G. af Hällström (Åbo).*

**Bruijn, N. G. de:** An analogue of Grace's apolarity theorem. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. 23, 69—76 (1949).

Liegen die Nullstellen der Polynome  $A(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k x^k$  und  $B(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k x^k$  auf den Kreis  $|x| = 1$ , so gilt dies auch für die Nullstellen des Polynoms  $AB(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k b_k x^k$ . — Diese bekannte Folgerung des Graceschen Apolaritätstheorems hat ein Analogon bei transzendenten Funktionen vom Typ  $R$ . Eine ganze Transzendente Funktion  $F(z)$  vom Typ  $R$  hat die Form  $F(z) = e^{-\frac{1}{2}\alpha z^2} G(z)$ , wo  $G(z)$  eine transzendente Funktion vom Geschlecht  $\leq 1$  mit lauter reellen Nullstellen bedeutet und  $\alpha \geq 0$  ist. Das Analogon ist der Satz: Sind  $f(y)$  und  $g(y)$  stetige Funktionen im Intervall  $(-\infty, +\infty)$ , sind  $f(y) = O(e^{\frac{1}{2}\varrho y^2})$ ,  $g(y) = O(e^{\frac{1}{2}\sigma y^2})$ ,  $0 \leq \varrho < 1$ ,  $0 \leq \sigma < 1$ , und haben die Funktionen

$$F(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} f(y) e^{iyz} dy, \quad G(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} g(y) e^{iyz} dy$$

den Typ  $R$ , so ist auch die Funktion

$$FG(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} f(y) g(y) e^{iyz} dy$$

im Falle  $\varrho + \sigma < 1$  vom Typ  $R$ .

*Gy. Sz.-Nagy (Szeged).*

**Korevaar, J.:** An inequality for entire functions of exponential type. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. 23, 55—62 (1949).

Verf. beweist als Verschärfung früherer Resultate von Plancherl und Pólya, Paley und Wiener, Siegel, Boas die folgende Ungleichung: Es sei  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtypus  $a$ , d. h.  $|f(z)| < A(\varepsilon) e^{(a+\varepsilon)|z|}$ . Es existiere ein solches  $p \geq 1$ , daß  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx$  existiert. Dann gilt die Ungleichung

$$|f(x + iy)|^p \leq A_p \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right\} \frac{\sin(p a y)}{y};$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}, \quad A_p = \frac{\varepsilon^k}{p\pi} < \frac{1}{\pi} \quad (2^k < p \leq 2^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

Zum Beweis benutzt der Verf. die Fourier-Integral-Transformation und die Ungleichung von Hölder und Titchmarsh.

*Saxer (Zürich).*

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

**Zwirner, Giuseppe:** Un criterio d'esistenza e d'unicità per gli integrali dell'equazione  $y' = \lambda f(x, y)$  passanti per due punti assegnati. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. s. 3, 15—18 (1948).

Als Ergänzung seiner früheren Untersuchung [*Rend. Sem. mat. Univ. Padova*

15, 33—39 (1946)] gibt Verf. den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz für ein Integral der Differentialgleichung  $y' = \lambda f(x, y)$ , das durch zwei vorgegebene Punkte hindurchgeht: Es sei  $f(x, y)$  eine samt der Ableitung  $f'_y(x, y)$  im Rechteck  $R$ :  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $a \leq y \leq b$  stetige Funktion, und es seien  $y_0$  und  $y_1$  zwei Werte zwischen  $a$  und  $b$ . Wenn es zwei in  $(x_0, x_1)$  integrierbare Funktionen  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  mit  $0 \leq p_1(x) \leq p_2(x)$  gibt von der Eigenschaft, daß für jedes  $(x, y)$  aus  $R$

$$p_1(x) \leq f(x, y) \leq p_2(x) \quad \text{gilt mit} \quad \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx > 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} p_2(x) dx < (b - y_0) \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx, \quad |y_1 - y_0| \int_{x_0}^{x_1} p_2(x) dx < (y_0 - a) \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx,$$

dann hat das Problem

$$y' = \lambda f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

eine und nur eine Lösung  $[\lambda_0, y_0(x)]$  mit in  $x_0 \leq x \leq x_1$  stetigem  $y_0(x)$ .

*S. Cinquini (Pavia).*

**Cafiero, Federico:** Su un problema ai limiti relativo all'equazione  $y' = f(x, y, \lambda)$ . Giorn. Mat. Battaglini 77, 145—163 (1947).

L'Autore studia il problema al contorno  $y'(x) = f(x, y(x), \lambda)$ ,  $y(x_1) = \varphi_1(\lambda)$ ,  $y(x_2) = \varphi_2(\lambda)$  e indica teoremi di esistenza e di unicità che estendono risultati precedenti di Zwirner [Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 15, 33—39 (1946)] relativi al problema al contorno  $y'(x) = \lambda F(x, y(x))$ ,  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$ , considerato da Zawischka [Mh. Math. Physik 37, 103—124 (1930)].

*G. Scorza-Dragoni.*

**Cafiero, Federico:** Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 124—128 (1948).

E. Baiada hat [dies. Zbl. 29, 260], indem er ein eigenes Verfahren mit einem von Tonelli kombinierte, zwei Vergleichssätze bez. der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  bei stetigem  $f(x, y)$  aufgestellt. Verf. setzt allgemeiner die Bedingungen von Carathéodory voraus:  $f(x, y)$  meßbar bez.  $x$  und stetig in  $y$  für  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,  $-\infty < y < +\infty$  ( $a > 0$ ), und beweist ziemlich einfach die beiden folgenden Sätze von Baiada: A) Wenn

$$(1) \quad |f(x, y)| < \varphi(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a.$$

mit in  $(x_0, x_0 + a)$  nach Lebesgue summierbarem  $\varphi(x)$  und wenn  $\gamma(x)$  in  $(x_0, x_0 + a)$  stetig ist und der Integralungleichung

$$\gamma(x) \leq \gamma(\xi) + \int_{\xi}^x f[t, \gamma(t)] dt \quad (x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + a)$$

genügt, so existiert wenigstens eine Lösung  $g(x)$  der Integralgleichung in  $y$

$$(2) \quad y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad y_0 \geq \gamma(x_0),$$

die der Ungleichung  $g(x) \geq \gamma(x)$  im ganzen Intervall  $(x_0, x_0 + a)$  genügt. — B) Wenn  $f(x, y)$  bez.  $x$  meßbar und bez.  $y$  stetig ist in dem Streifen  $S_1$ :  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y < +\infty$  und für  $a \leq x \leq b$  der Bedingung (1) genügt, wenn ferner  $\psi(x)$  in  $(a, b)$  eine stetige, abnehmende Funktion ist und man für jeden Punkt  $(\xi_1, \eta)$  von  $S_1$  zwei positive Zahlen  $\delta_1, \delta_2$  so bestimmen kann, daß

$$\psi(\xi_1) - \psi(x) \geq \int_{\xi_1}^x \text{Max} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt \quad \text{für} \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_1,$$

$$\psi(\xi_1) - \psi(x) \leq \int_{\xi_1}^x \text{Max} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt \quad \text{für} \quad \xi_1 - \delta_1 \leq x \leq \xi_1,$$

wobei das Maximum für jedes  $t$  für  $|\eta - y_1| < \delta_2$ ,  $|\eta - y_2| < \delta_2$  bestimmt wird,



und wenn  $\gamma(x)$  stetig ist und in  $(a, b)$  der Integralgleichung

$$\gamma(x) = \psi(x) + \int_{x_0}^x f(t, \gamma(t)) dt$$

genügt, so erfüllt jede Lösung  $g(x)$  der Integralgleichung (2) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} g(x) &> \gamma(x) \quad \text{für } x_0 < x \leq b, & \text{wenn } y_0 \geq \gamma(x_0), \\ g(x) &< \gamma(x) \quad \text{für } a \leq x < x_0, & \text{wenn } y_0 \leq \gamma(x_0). \end{aligned}$$

G. Sansone (Florenz).

**Giuliano, Landolino:** Sul teorema di confronto di Sturm. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 16—19 (1947).

L. Tonelli hat einen Trennungssatz für die Nullstellen der Lösungen einer speziellen Klasse von Gleichungen zweiter Ordnung  $f(x, y, y', y'') = 0$  aufgestellt, indem er das Büschel der von einem Punkte der  $x$ -Achse ausgehenden Integralkurven untersuchte. Verf. betrachtet die beiden Gleichungen

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2) \quad z'' + p(x)z' + q_1(x)z = 0$$

mit in  $(a, b)$  stetigem  $p(x), q(x), q_1(x), q_1(x) \geq q(x)$  und beweist mit einer Überlegung von derselben Art, wie die von Tonelli, den klassischen Vergleichssatz von Sturm: Wenn  $y(x)$  ein nicht identisch verschwindendes Integral von (1) ist, so daß  $y(a) = y(b) = 0$ , dann kann für irgendein Integral  $z(x)$  von (2) nicht in ganz  $(a, b)$  gelten:  $z(x) \neq 0$ .

G. Sansone (Florenz).

**Trevisan, Giorgio:** Un teorema per i sistemi di due equazioni differenziali ordinarie. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 219—221 (1948).

Le funzioni reali e di variabili reali  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$ , misurabili rispetto ad  $x$  e continue rispetto ad  $(y, z)$  nella striscia  $S$  definita dalle  $a \leq x \leq b, |y| < +\infty, |z| < +\infty$ , soddisfacciano ivi alle condizioni:

$$\begin{aligned} |f(x, t, z) - f(x, u, z)| &\leq k(x) |t - u|, \quad |g(x, y, v) - g(x, y, w)| \leq k(x) |v - w|, \\ |f(x, y, z)| &\leq k(x), \quad |g(x, y, z)| \leq k(x), \end{aligned}$$

con  $k(x)$  non negativa e sommabile in  $a \leq x \leq b$ ;

$$(f(x, y, v) - f(x, y, w)) \cdot (v - w) \geq 0, \quad (g(x, t, z) - g(x, u, z)) \cdot (t - u) \geq 0.$$

Allora, se  $m(x), n(x)$  e  $p(x), q(x)$  sono due coppie di soluzioni assolutamente continue del sistema  $y' = f, z' = g$  definite in  $a \leq x \leq b$  e se l'espressione  $(m(x) - p(x)) \cdot (n(x) - q(x))$  è nulla in  $a$  e in  $b$ , essa riesce identicamente nulla in tutto l'intervallo  $a \leq x \leq b$ .

G. Scorza-Dragoni (Padova).

**Bruwier, L.:** Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants. Bull. Ecole Polytechn. Jassy 3, 532—542 (1948).

Vengono posti in luce alcuni rapporti esistenti fra il problema dell'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e quello della risoluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari.

Gaetano Fichera.

**Nalli, Pia:** L'equazione differenziale  $y'' + y = f(x) \sqrt{1 - y^2 - y'^2}$ . Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 195—204 (1947).

Die Aufgabe, im dreidimensionalen Euklidischen Raume eine Kurve zu bestimmen, wenn ihre Krümmung und Windung als Funktionen der Bogenlänge bekannt sind, wird, durch geeignete Wahl der unabhängigen Veränderlichen, auf die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung  $y'' + y = f(t) \sqrt{1 - y^2 - y'^2}$  zurückgeführt. Kennt man ein partikuläres Integral dieser Gleichung, für das  $y_1^2 + y_1'^2 \neq 1$  ist, so ist das allgemeine Integral gegeben durch

$$y = \alpha y_1 + \beta \sqrt{1 - y_1^2} z \quad \text{mit} \quad z = \sin \left[ \int_0^t \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - y_1'^2}}{\sqrt{1 - y_1^2}} dt + c \right],$$

wo  $\alpha, \beta, c$  Konstanten,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

G. Sansone (Florenz).

**Lucking, D. F.:** Phase characteristics of exponential functions. *Nature*, London 163, 180 (1949).

Bei der Funktionaldifferentialgleichung  $\dot{x}(t_2) = -kx(t_1)$  mit  $t_2 - t_1 = c$  hängt das Verhalten der Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  vom Wert der Konstanten  $\varphi = kc$  ab. Unbegrenzt anwachsende Lösungen treten auf für  $\varphi > \pi/2$ , ständig abnehmende Lösungen für  $0 < \varphi < \pi/2$ . Harmonische Schwingungen sind nur für  $\varphi = \dots -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, \dots$  möglich. Beweise werden nicht gegeben. *Collatz* (Hannover).

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

**Popovici, Constantin:** Les espaces conjugués, leurs transformations infinitésimales et intégration par conditions à la limite. *Ann. Soc. Polonaise Math.* 20, 323—334 (1948).

Verf. knüpft an seine früheren Arbeiten über Differentialgleichungen mit reziproken Integralen an (insbesondere an seine Thèse: *Sur les surfaces intégrales communes aux équations différentielles*, Paris 1908). Die dort eingeführten Begriffsbildungen verallgemeinernd, definiert er: In einem  $R_n(x)$  heißen zwei Reihen von  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten konjugiert, wenn die Koordinaten dieser zwei Reihen Gleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j \partial v_h} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha h} \frac{\partial x_i}{\partial u_{\alpha}} + \sum_{\beta} \mu_{j\beta} \frac{\partial x_i}{\partial v_{\beta}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j, h = 1, 2, \dots, k,$$

erfüllen. Ferner: Zwei infinitesimale Transformationen  $A(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  und

$B(f) = \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  oder, was dasselbe ist, zwei Kurvenscharen

$$\frac{dx_i}{a_i(x)} = \frac{dx_n}{a_n(x)}, \quad \text{und} \quad \frac{dx_i}{b_i(x)} = \frac{dx_n}{b_n(x)}$$

heißen konjugiert, wenn Beziehungen der Art

$$A(b_i) = \alpha a_i + \beta b_i, \quad B(a_i) = \gamma a_i + \varepsilon b_i$$

bestehen. Nun wird folgende Aufgabe gestellt und gelöst: erfüllen drei Funktionen  $x_1, x_2, x_3$  von  $u, v$  eine Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v},$$

so stellen die  $x_v$  im  $R_3(x)$  eine Fläche dar, auf der die Kurven  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  konjugiert sind. Ist es möglich, solche Flächen derart zu bestimmen, daß sie durch zwei vorgegebene Kurven  $C_1$  und  $C_2$  gehen? Die Antwort: ist wenigstens eine der Kurven  $C_i$  eine solche der konjugierten Scharen  $u, v$ , dann gibt es nur eine Lösung (nur eine Fläche), in allen übrigen Fällen aber unendlich viele, die alle durch  $C_1$  und  $C_2$  gehen. — Ferner: Vorgelegt seien zwei infinitesimale Transformationen

$$A(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad B(f) = \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

bzw. zwei Richtungsfelder

$$dx_i = a_i dx_n, \quad \delta x_i = b_i \delta x_n;$$

a) unter welchen Bedingungen stellen diese beiden Kurvenscharen eine Mannigfaltigkeit gemeinsamer Integralfächen dar, auf denen diese Scharen konjugierte Kurven bilden? b) welches sind die Integralfächen, die durch zwei gegebene Kurven hindurchgehen? — Diese beiden Probleme werden erst für  $n = 3$  und dann für allgemeines  $n$  gelöst; anschließend wird auf einige geometrische Anwendungen hingewiesen. *Hardtwig* (München).

**Mangeron, D. I.:** Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. *Bull. Ecole Polytechn. Jassy* 2, 89—92 (1947).



Sia  $D$  l'insieme dei punti dello spazio a  $n$  dimensioni definito dalle limitazioni  $a_i \leq x_i \leq b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) essendo  $a_i < b_i$ . Si consideri in  $D$  il problema al contorno

$$(1) \quad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \dots \partial x_n^2} - \lambda A(x_1, x_2, \dots, x_n) u = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad u = 0 \text{ su } FD.$$

Supposto  $\lambda = 1$  e nell'ipotesi che tale valore di  $\lambda$  non sia autovalore per il problema omogeneo associato, l'Au. enuncia, senza dimostrare, alcuni teoremi che forniscono maggiorazioni del tipo seguente per la soluzione  $u$  di (1):  $\max_D |u| < L \max_D |f|$  essendo  $L$  un numero che dipende dalle dimensioni di  $D$  e dalla ubicazione degli autovalori sull'asse  $\lambda$ , rispetto al punto 1. Gaetano Fichera (Roma).

**Verblunsky, S.: On a class of harmonic functions.** J. London math. Soc. **23**, 49—56 (1948).

$G$  sei ein von einer Jordankurve berandetes Gebiet, das durch den Querschnitt  $AB$  in Teilgebiete  $G_1, G_2$  zerfällt. Ist  $u$  harmonisch in  $G$  und Differenz zweier positiver harmonischer Funktionen in  $G_1$ , in  $G_2$  und in  $G$ -Umgebungen von  $A$  und  $B$ , so besitzt  $u$  dieselbe Eigenschaft in  $G$ . In den Umgebungen kann alternativ auch die Beschränktheit von  $u$  angenommen werden. Ebenso ist  $u$  in  $G$  die Differenz positiver harmonischer Funktionen, wenn  $u$  diese Eigenschaft in einer geeigneten  $G$ -Umgebung eines jeden Randpunktes besitzt und in  $G$  harmonisch ist. Diese Resultate beweist Verf., von früher bekannten Sätzen ausgehend, mit Hilfe geeigneter konformer Abbildungen. G. af Hällström (Åbo).

**Nicolesco, Miron: Approssimazione delle funzioni armoniche in più variabili mediante polinomi armonici.** Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. **6**, 410—423 (1947).

Ausgehend von der Darstellung einer harmonischen Funktion in einem Gebiet des  $R_3$  durch eine im Innern gleichmäßig konvergente Folge von rationalen harmonischen Funktionen wird zunächst eine analoge Darstellung durch Funktionen mit einem vorgegebenen Pol im Äußern des Gebiets gegeben; ferner die gleichzeitige Darstellung von mehreren (unendlich vielen) harmonischen Funktionen in getrennten Gebieten durch eine Folge harmonischer Funktionen und endlich die Darstellung einer stetigen Funktion durch eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, die Grenzfunktionen von harmonischen Funktionen sind. H. Hornich (Graz).

**Diaz, J. B. and H. J. Greenberg: Upper and lower bounds for the solution of the first biharmonic boundary value problem.** J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 193—201 (1948).

Vengono date delle formole di maggiorazione per la soluzione  $w$  del seguente problema al contorno (problema bi-iperarmonico), considerato in un campo  $R$  di contorno  $C$

$$\Delta \Delta w = p \quad \text{in } R; \quad w = f, \quad \frac{dw}{dn} = g \quad \text{su } C.$$

Nell'ipotesi che si possa disporre di due sistemi di funzioni, che godono di opportune proprietà di completezza, viene indicato un procedimento di calcolo della soluzione.

Gaetano Fichera (Roma).

### Variationsrechnung:

**Rothe, E. H.: Completely continuous scalars and variational methods.** Ann. Math., Princeton, II. s. **49**, 265—278 (1948).

Ein vollstetiger Skalar in einem reellen Hilbertschen Raum  $E$  mit den Elementen  $\xi$  ist eine reellwertige Funktion  $I(\xi)$ , deren Gradient  $\mathfrak{F}(\xi)$  eine vollstetige Abbildung darstellt. Ein spezielles Beispiel ist die quadratische Integralform

$$(1) \quad I(y) = \frac{1}{2} \int_D \int_D K(s, t) y(s) y(t) ds dt,$$

wo  $D$  ein einfach zusammenhängender Bereich eines  $n$ -dimensionalen euklidischen

Raumes,  $K(s, t)$  ein stetiger, symmetrischer Kern ist und  $E$  aus den Funktionen  $y(s)$  besteht, die in  $D$  meßbar und quadratisch integrierbar sind. Diese Formen sind grundlegend in der Theorie der linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. Verf. zeigt entsprechend, daß die vollstetigen Skalare das passende Hilfsmittel bei der Behandlung von Funktionalgleichungen, in denen der Gradient  $\mathfrak{F}$  auftritt, wie (2)  $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = 0$  und (3)  $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \lambda \mathfrak{x}$ , mit Methoden der Variationsrechnung darstellen. — Die Hauptfrage ist die nach der Existenz eines Extremums eines vollstetigen  $I(\mathfrak{x})$ . Es wird gezeigt, daß ein solches  $I(\mathfrak{x})$  in dem Kugelraum  $\|\mathfrak{x}\| \leq r$  des Hilbertschen Raumes  $E$  immer ein Maximum und ein Minimum annimmt. (Für eine beliebige abgeschlossene, beschränkte Menge wäre der Satz falsch.) Dieses Resultat ist die Grundlage für die Behandlung des Eigenwertproblems (3). Die Tatsache, daß  $\mathfrak{F}$  ein Gradient ist, erscheint dabei als eine naturgemäße Verallgemeinerung der Symmetrievoraussetzung über  $K(s, t)$  in dem speziellen Fall (1). Unter dieser Voraussetzung wird gezeigt, daß es wenigstens zwei verschiedene Lösungen von (3) gibt, die zu reellen  $\lambda$  gehören. — Zum Schluß wird eine Anwendung auf das verallgemeinerte Dirichletsche Integral gemacht, das bei der Behandlung von Randwertproblemen mit Variationsrechnung auftritt. Dieses ist kein vollstetiger Skalar, kann aber durch eine Transformation mit einer Greenschen Funktion in einen solchen übergeführt werden. Doetsch (Freiburg i. B.).

**Funk, Paul:** Beiträge zur zweidimensionalen Finslerschen Geometrie. Mh. Math., Wien 52, 194—216 (1948).

In dieser Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gegeben, daß sich das ebene Variationsproblem von der Form

$$\int F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \rightarrow \text{Extr.}$$

durch Anwendung spezieller Koordinatensysteme in ein solches mit geradlinigen Extremalen transformieren läßt. — Verf. definiert drei grundlegende Differentiationsprozesse einer Funktion  $\Phi$ , nämlich  $\Phi_s$  nach der Länge,  $\Phi_b$  nach der Breite und  $\Phi_\theta$  nach dem Winkel, und führt die Begriffe der endlichen Länge und Breite, des (Landesbergischen) Winkels, des Krümmungsmaßes  $K$  und des Hauptskalars  $J$  ein. Durch die invarianten Kennzeichen des Variationsproblems, dessen Eulersche Gleichung die Gestalt  $y'' = A(x, y) + B(x, y)y' + C(x, y)y'^2 + D(x, y)y'^3$  annimmt, werden die gesuchten Bedingungen erhalten, weil die Gleichung  $d^2\eta/dx^2 = 0$  der geradlinigen Extremalen mittels einer Punkttransformation in dieser Klasse eingeführt werden kann. — Diese Bedingungen lauten:

$$\bar{\bar{J}}_{\theta\theta s} + 3\bar{\bar{J}}_{\theta b} + 2\bar{\bar{J}}\bar{\bar{J}}_{\theta s} - 2\bar{J}_\theta\bar{\bar{J}}_s + 4\bar{\bar{J}}_s + 2\bar{\bar{J}}\bar{J}_b = 0, \quad \bar{K}_b - \frac{1}{3}\bar{\bar{K}}_{\theta s} = 0,$$

wo ein Querstrich bzw. zwei Querstriche oberhalb der Buchstaben bedeuten, daß  $y' = 0$  bzw.  $y = 0$  und  $y' = 0$  sein sollen. N. Theodorescu (Bukarest).

**Schaefer, H.:** Transformationen der Variationsrechnung und ihre Anwendung auf technische Eigenwertprobleme. Z. angew. Math. Mech. 29, 25—27 (1949).

### Integralgleichungen:

**Langenhop, Carl Eric:** Properties of kernels of integral equations whose iterates satisfy linear relations. Abstract of a Thesis. Jowa College, J. Sci. 23, 50—52 (1949).

Ist der Kern  $K_1(x, y)$  einer Fredholmschen Integralgleichung im Definitionsquadrat reell, beschränkt und meßbar und besteht zwischen den iterierten Kernen eine Beziehung

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m K_m(x, y) \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 \neq 0,$$



so ist  $K_1(x, y)$  ausgeartet:

$$K_1(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i(x) v_i(y).$$

Beweismethode:  $K_1(x, y)$  genügt einer Integralgleichung

$$(*) \quad K_1(x, y) = \int_a^b H(x, t) K_1(t, y) dt,$$

wo  $H(x, y)$  eine Linearkombination der Iterierten  $K_m(x, y)$  ist. Mit der Besselschen Ungleichung zeigt man, daß es nur endlich viele Werte  $y$  gibt, für die (\*) linear unabhängige Lösungen  $K_1(x, y)$  besitzt. — Aus diesem Resultat werden einige Folgerungen gezogen, die aber bekannt und auf anderem Wege beweisbar sind.

*Iglisch (Braunschweig).*

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Munteanu, Octav:** Applications du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable. Bull. Ecole Polytechn. Jassy 2, 19—21 (1947).

Verf. untersucht ganzzahlige Fortsetzungen der Funktion  $f(m, n) = m + n$  (bzw.  $f(m, n) = m \cdot n$ ) für reelle Argumente  $\geq 0$  (bzw.  $\geq 1$ ), wobei statt Assoziativität gefordert wird:  $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ . Zu beliebigen Werten  $f(0, x)$  (bzw.  $f(1, x)$ ) für nichtganzes  $x$  gibt es genau eine Lösung. *Lorenzen (Bonn).*

**Svirskij, I. V.:** Bestimmung der inversen Operatoren aus gewissen Eigenschaften der direkten Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 63, 103—106 (1948) [Russisch].

$A$  sei ein Operator im Hilbertschen Raume  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ ;  $D(A) = \mathfrak{H}_1$ ;  $(Af, g) = (f, Ag)$  und  $(Af, f) \geq 0$  für  $f, g \in \mathfrak{H}_1$ ;  $A = A_0 + B$  mit  $A_0 \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_1$ ,  $B \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$ .  $E_1, E_2, P_1, P_2$  seien die Einheiten bzw. Projektoren zu  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$ . Verf. sucht sämtliche Hermiteschen Fortsetzungen  $\tilde{A} \geq 0$  von  $A$  auf  $\mathfrak{H}$  und beweist: es ist stets  $\tilde{A} = (A_0 + B) P_1 + (B^* + X) P_2$ , wo  $X \mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_2$ ,  $X = X^*$  und  $X \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} B(A_0 + \varepsilon E_1)^{-1} B^*$ . Beschränkte Lösungen  $\tilde{A}$  gibt es also sicher, wenn

$A_0$  positive untere Schranke hat. — Verallgemeinerung auf unbeschränktes (selbstadjungiertes)  $A_0$  und  $\tilde{A}$  wird angedeutet. — Anwendung zur Lösung folgender Frage: Es sei  $H$  selbstadjungiert,  $|H^{-1}g| \leq n |g|$  für  $g \in \mathfrak{H}$  und  $Hf_i = g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ); gesucht werden sämtliche  $H'$  mit den gleichen Eigenschaften.  $\mathfrak{H}_1$  ist jetzt der von den  $g_i$  aufgespannte Unterraum;  $A = nE_1 \pm G$ , wenn  $G$  auf  $\mathfrak{H}_1$  durch  $Gg_i = f_i$  definiert ist. — In der Arbeit ist für  $k$  und  $n$  derselbe Buchstabe  $n$  verwendet. Mehrere sinnstörende Druckfehler.

*Wecken (Haltingen, Kr. Lörrach).*

**Akilov, G. P.:** Notwendige Bedingungen für die Fortsetzbarkeit linearer Operationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 417—418 (1948) [Russisch].

In einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 29, 54; Bezeichnungen vgl. dort] definierte Verf. die Eigenschaft  $E_0$  eines Raumes  $X_0$  durch eine Beziehung, die für alle  $Y$  gelten soll, sowie die Eigenschaft  $E_y$  des Raumes  $Y$  durch dieselbe Beziehung, wenn sie für alle  $X_0$  gilt. Hier wird die Äquivalenz von  $E_0$  und  $E_y$  behauptet und weitere Resultate angegeben, insbesondere notwendige Bedingungen für  $E_0$  sowie Sätze, die von  $X$  auf einen Unterraum  $X_0 \subset X$  zu schließen gestatten. Aussagen der o. a. Arbeit werden über die dort bevorzugten halbgeordneten Räume hinaus erweitert und verschärft. Keine Beweise.

*Wecken (Haltingen, Kr. Lörrach).*

**Klee jr., V. L.:** The support property of a convex set in a linear normed space. Duke math. J. 15, 767—772 (1948).

Es werden folgende Sätze über Stützebenen konvexer Mengen eines linearen normierten Raumes  $E$  bewiesen: Jeder konvexe, abgeschlossene Kegel  $\neq E$  hat wenigstens eine Stützebene. Daß nicht jeder Randpunkt eine Stützebene zu haben

braucht, zeigt in  $l^p$  der Kegel aller  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  mit  $\xi_i \geq 0$ , der aus lauter Randpunkten besteht, nur in einer Menge von der ersten Kategorie jedoch Stützebenen hat. Der Satz von Mazur, daß eine konvexe Menge mit innerem Punkt in jedem Randpunkt eine Stützebene besitzt, wird neu bewiesen. Daß in jedem Randpunkt eine Stützebene existiert, wird auch noch für konvexe abgeschlossene Mengen  $K$  mit einer der folgenden Eigenschaften bewiesen: a) Die beschränkten Teilmengen von  $K$  sind schwach folgenkompakt, b)  $E$  sei ein konjugierter Raum und die beschränkten Mengen von  $K$  sind schwach folgenkompakt im Sinne der schwachen Konvergenz der Funktionale, c)  $E$  sei ein konjugierter Raum und  $K$  ist transfinit abgeschlossen. Köthe (Mainz).

**Lorch, E. R.:** On certain implications which characterize Hilbert space. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 523—532 (1948).

Dafür, daß ein reeller, linearer, normierter Raum ein Hilbertscher Raum ist, ist jede der folgenden Bedingungen für die Norm notwendig und hinreichend: 1. Es gibt ein  $\gamma \neq 0, \pm 1$ , so daß aus  $|f+g| = |f-g|$  stets  $|f+\gamma g| = |f-\gamma g|$  folgt; 2. aus  $f+g+h=0$  und  $|f|=|g|$  folgt stets  $|f-h|=|g-h|$ ; 3. aus  $f+g+h+k=0$  und  $|f|=|g|, |h|=|k|$  folgt stets  $|f-h|=|g-k|$  und  $|g-h|=|f-k|$ ; 4. der Ausdruck  $|f_1+f_2+g|^2 + |f_1+f_2-g|^2 - |f_1-f_2-g|^2 - |f_1-f_2+g|^2$  ist unabhängig von  $g$ ; 5. aus  $|f|=|g|$  folgt  $|\alpha f + \alpha^{-1}g| \geq |f+g|$  für alle reellen  $\alpha \neq 0$ ; 6. für ein  $n \geq 3$  folgt aus  $f_1 + \dots + f_n = 0$  stets  $\sum_{i \neq j} |f_i - f_j|^2 = 2n \sum_i |f_i|^2$ . Die

Beweise erfordern nur elementare Hilfsmittel.

Köthe (Mainz).

**Kaplansky, Irving:** Lattices of continuous functions. Bull. Amer. math. Soc. 53, 617—623 (1947).

$R$  sei eine Kette (geordnete Menge) ohne erstes und letztes Element. In  $R$  sei die natürliche Topologie erklärt (die Mengen  $U(\alpha)$  aller  $\beta > \alpha$  und  $L(\alpha)$  aller  $\beta < \alpha$  bilden ein erzeugendes System der offenen Mengen von  $R$ ). Ein kompakter Hausdorffscher Raum  $X$  heißt  $R$ -separiert, wenn es zu jedem Paar  $x \neq y$  aus  $X$  und  $\alpha \neq \beta$  aus  $R$  eine stetige Funktion  $f$  auf  $X$  mit Werten aus  $R$  gibt mit  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) = \beta$ . Die Menge  $C$  aller stetigen Funktionen  $f$  auf  $X$  bildet bezüglich  $f \geq g$  (d. h.  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in X$ ) einen distributiven Verband. Es wird nun bewiesen, daß der  $R$ -separierte kompakte Hausdorffsche Raum  $X$  durch  $C$  eindeutig bestimmt ist. Der Beweis benutzt die Primideale von  $C$ . Jedes Primideal  $P$  ist einem einzigen  $x$  aus  $X$  assoziiert in dem Sinn, daß ein  $f \in P$  existiert, so daß aus  $g(x) < f(x)$  stets  $g \in P$  folgt. Ordnet man jedem  $x$  die Klasse aller zu  $x$  assoziierten Primideale aus  $C$  zu, so ergibt sich die Topologie von  $X$  durch die Enthaltenseinsbeziehung zwischen den Primidealen. Folgende Spezialfälle sind in dem Resultat enthalten: Ist  $C(X)$  der Ring der reellen, stetigen Funktionen auf  $X$ , so ist  $X$  durch den Ring  $C(X)$  eindeutig bestimmt [Gelfand und Kolmogoroff, C. R. Acad. Sci. URSS, II. s. 22, 11—15 (1939); dies. Zbl. 21, 411]; ist  $X$  ein kompakter Hausdorffscher Raum, so charakterisiert der Banachraum  $C(X)$  der reellen, stetigen Funktionen eindeutig  $X$  [Stone, Trans. Amer. math. Soc. 41, 375—481 (1937); dies. Zbl. 17, 135]. — Zerfällt  $X$  in zwei offene und abgeschlossene Mengen  $X_1$  und  $X_2$ , so wird  $C(X)$  das direkte Produkt der beiden Verbände  $C(X_1)$  und  $C(X_2)$ . Umgekehrt entspricht jeder direkten Produktzerlegung  $C \cong C_1 \times C_2$  des Verbandes eine Zerlegung von  $X$  in zwei offene und abgeschlossene Mengen  $X_1$  und  $X_2$  mit  $C_i \cong C(X_i)$ . Dies gilt sogar ohne die Voraussetzung der  $R$ -Separiertheit und im Fall, daß  $R$  die Menge der reellen Zahlen ist, sogar ohne die Kompaktheit von  $X$ . Köthe.

**Alexiewicz, A. et W. Orlicz:** Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites. Fundam. Math., Warszawa 35, 105—126 (1948).

$X$  sei ein Banachraum,  $\tilde{X}$  sein konjugierter Raum. Eine Menge  $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$  heißt fundamental, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $x \in X$  eine Linearkombination  $\xi = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ ,  $\xi_i \in \tilde{X}_0$ ,  $|\xi| \leq 1$ , gibt mit  $|\xi(x)| \geq |x| - \varepsilon$ . Ist  $U$  ein



vollständiger metrischer Raum, so heißt eine Funktion  $x(u)$ ,  $u \in U$ ,  $x(u) \in X$ , eine abstrakte Funktion.  $x(u)$  ist stetig in  $u_0$ , wenn aus  $(u, u_0) \rightarrow 0$  folgt  $|x(u) - x(u_0)| \rightarrow 0$ . Die stetigen Funktionen bilden die 0-te Klasse; ist  $\alpha$  eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, so bilden die Grenzfunktionen konvergenter Folgen von Funktionen kleinerer als  $\alpha$ -ter Klasse die Funktionen  $\alpha$ -ter Klasse.  $x(u)$  heißt schwach stetig bezüglich der fundamentalen Menge  $\tilde{X}_0$ , wenn für jedes  $u_0 \in U$  und jedes  $\xi \in \tilde{X}_0$  die reelle Funktion  $\xi(x(u))$  in  $u_0$  stetig ist. Ist  $x(u)$  schwach stetig bezüglich  $\tilde{X}_0$  und ist der Bildraum von  $x(u)$  separabel in  $X$ , so ist  $x(u)$  von der 1. Klasse. Daraus folgt der schon von I. Gelfand [Mat. Sbornik, II. S. 4, 235—286 (1938); dies. Zbl. 20, 367] bewiesene Satz, daß jede bezüglich  $\tilde{X}$  schwach stetige Funktion  $x(u)$  von 1. Klasse ist, wenn  $U$  separabel ist.  $x(u)$  gehört zur schwachen  $\alpha$ -ten Klasse bezüglich  $\tilde{X}_0$ , wenn für jedes  $\xi \in \tilde{X}_0$  gilt, daß  $\xi(x(u))$  von  $\alpha$ -ter Klasse ist. Ist  $x(u)$  von der schwachen  $\alpha$ -ten Klasse und ist der Bildbereich separabel, so ist  $x(u)$  von der Klasse  $\alpha + 1$ ; ist der Bildbereich kompakt, so ist  $x(u)$  sogar von der Klasse  $\alpha$ . Eine Funktion  $x(u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_i \in U_i$ , kann aufgefaßt werden als Funktion einer Variablen  $w = (u_1, \dots, u_n)$  aus  $W = U_1 \times \dots \times U_n$ . Ist die Funktion  $x(u_1, \dots, u_n)$  mit separablem Bildbereich schwach stetig bezüglich  $\tilde{X}_0$  in jeder Variablen  $u_i$ , so ist sie in  $w$  von der Klasse  $n$ . Eine Menge in  $W$  heißt residual, wenn ihr Komplement von der 1. Kategorie ist. Gelten für  $x(u_1, \dots, u_n)$  die obigen Voraussetzungen, so ist die Menge ihrer Stetigkeitspunkte residual. Das gilt auch noch für die Grenzfunktion einer konvergenten Folge solcher  $x^p(u_1, \dots, u_n)$ . Von den zahlreichen Spezialisierungen und Anwendungen sei eine erwähnt: Ist  $f(x, y)$  eine in einem Rechteck stetige reelle Funktion, so geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  des Rechtecks bekanntlich wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ . Die obere Grenze aller dieser Integrale durch  $(x_0, y_0)$  ist selbst ein Integral, das obere Integral  $y(x; x_0, y_0)$  von  $y' = f(x, y)$ . Dann ist für alle Punkte  $(x_0, y_0)$  einer im Rechteck residualen Menge  $R$  das obere Integral  $y(x; x_0, y_0)$  eine stetige Funktion von  $(x_0, y_0)$ , d. h. für  $(x_0, y_0) \in R$  gilt  $\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow x_0, \\ \bar{y} \rightarrow y_0}} y(x; \bar{x}, \bar{y}) = y(x; x_0, y_0)$  gleichmäßig in  $x$  in einer genügend kleinen Umgebung von  $x_0$ .

Köthe (Mainz).

**Turowicz, A.:** Sur les fonctionnelles continues et multiplicatives. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 135—156 (1948).

$E$  sei ein kompakter metrischer Raum,  $\mathfrak{A}(E)$  der Ring der reellen stetigen Funktionen auf  $E$  mit der Metrik  $(x, y) = \max_{t \in E} |x(t) - y(t)|$ ,  $\Phi$  die Menge aller reellen, multiplikativen, stetigen Funktionale auf  $\mathfrak{A}(E)$  [d. h.  $F(xy) = F(x)F(y)$  und  $F(x) \rightarrow F(x_0)$ , wenn  $(x, x_0) \rightarrow 0$ ]. Es gilt stets  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ ,  $F(x) \geq 0$  für  $x(t) \geq 0$  für alle  $t$ ;  $|F(x)| = F(|x|)$ . Ist  $0 \leq x_1(t) \leq x_2(t)$  für alle  $t$ , so ist  $F(x_1) \leq F(x_2)$ , ist  $x(t) \neq 0$  für alle  $t$ , so ist  $F(x) \neq 0$ . Zu jedem  $F \in \Phi$  existiert eine höchstens abzählbare, abgeschlossene „charakteristische“ Menge  $Z \subset E$ , so daß  $F(x) = 0$  ist, sobald  $x(t_0) = 0$  für  $t_0 \in Z$ . Ist andererseits  $x(t) = 1$  auf  $Z$ , so ist  $F(x) = 1$ . Ferner gilt  $F(x_1) = F(x_2)$ , wenn  $x_1(t) = x_2(t)$  auf  $Z$  gilt. Zur Untersuchung von  $F$  wird das lineare Funktional  $G(y) = \log F(e^{y(t)})$  gebildet,  $y \in \mathfrak{A}(E)$ . Es genügt, statt des Raumes  $\mathfrak{A}(E)$  den Raum  $\mathfrak{A}(Z)$  zu betrachten, der nach Mazur isomorph dem Raum  $c_0$  der Nullfolgen ist,  $G(y)$  hat daher die Form  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y(t_n)$ , wobei  $t_n \in Z$  durch-

läuft und  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$  ist. Daraus ergibt sich für  $F(x) \geq 0$  die Darstellung

$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} |x(t_n)|^{\alpha_n}$  mit  $\alpha_n > 0$  und  $\sum \alpha_n < \infty$ . Da jedes  $F$  die Form

$F(x) = |F(x)| \cdot \operatorname{sgn} F(x)$  hat, kommt alles auf die Bestimmung von  $\operatorname{sgn} F(x)$  an. Diese keineswegs einfache Untersuchung liefert als Ergebnis: Ist  $F \in \Phi$ , so existiert

eine Anordnung  $t_1, t_2, \dots$  der  $t_g$  aus  $Z$ , dazu eine Folge  $\alpha_n > 0$  mit  $\sum \alpha_n < \infty$ , ferner eine Folge  $\beta_n$ ,  $\beta_n = 1$  oder  $2$ , so daß

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} |x_i(t_i)|^{\alpha_i} \operatorname{sgn}^{\beta_1} x(t_1) \cdot \operatorname{sgn}^{\beta_2} x(t_2) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(t_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}}$$

ist. Die  $\alpha_n$  sind durch  $F$  und  $t_n$  eindeutig bestimmt, die  $\beta_n$  außerdem durch die Wahl der Reihenfolge der  $t_n$ . Umgekehrt liefert bei gegebenem  $Z$ , gegebenen  $\alpha_n, \beta_n$  ein solcher Ausdruck stets ein  $F \in \Phi$ , falls das zweite unendliche Produkt für alle  $x \in \mathfrak{U}(Z)$  sinnvoll ist.

Köthe (Mainz).

**Levitan, B.:** Über verallgemeinerte positiv definite und verallgemeinerte fast-periodische Folgen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 977—980 (1947) [Russ.].

Une suite  $(\omega_n)$  de fonctions continues définies sur  $[-1, +1]$  est dite une base lorsque ces fonctions sont linéairement indépendantes, et vérifient des relations de la forme  $\omega_p \omega_q = \sum c_{pqr} \omega_r$ ,  $\omega_p \bar{\omega}_q = \sum c_{pqr}^* \omega_r$ , les séries précédentes étant uniformément convergentes. L'auteur donne des exemples de cette notion (fonctions puissances, exponentielles etc.); il définit deux bases comme équivalentes si l'on passe de l'une à l'autre par des substitutions linéaires (infinies en général) uniformément convergentes. Une suite  $x_n$  de nombres complexes est dite de type positif relativement à la base  $\omega_n$  si la matrice  $\sum_r c_{pqr}^* x_r$  est positive; un procédé simple permet de former de telles suites à partir de suites de type positif relativement à une base équivalente; on en déduit que, si le „problème des moments“ généralisé admet une solution pour une certaine base, il en est de même pour les bases équivalentes (moyenant toutefois certaines restrictions); par exemple, on peut passer du problème classique de Hamburger à celui relatif à la suite  $\cos(n \cdot \arccos x)$ , ou encore de la suite  $\cos nx$  à la suite des fonctions propres d'un système de Sturm-Liouville. On peut aussi définir la notion de „presque périodicité“ d'une suite  $x_n$  relativement à une base  $\omega_n$ , et démontrer pour ce cas les théorèmes bien connus d'approximation.

R. Godement (Nancy).

**Rajkov, D. A.:** Über verschiedene Typen der Konvergenz positiv definiter Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 1279—1282 (1947) [Russisch].

Sur un groupe localement compact arbitraire, on sait que toute fonction continue de type positif  $f$  peut être considérée comme une forme linéaire continue et „positive“ sur l'algèbre normée  $L^1$  des fonctions sommables pour la mesure invariante à gauche — et réciproquement [Gelfand et Rajkov, Mat. Sbornik, II. s. 13, (1943)], la norme de cette forme étant précisément  $f(e)$  ( $e$ : unité du groupe). On peut alors définir dans l'ensemble de ces fonctions une topologie faible; le résultat principal démontré ici est que: si une fonction continue de type positif  $f$  converge faiblement vers une fonction (continue de type positif)  $f_0$ , et si en outre  $f(e)$  converge vers  $f_0(e)$ , alors  $f(x)$  converge uniformément sur tout compact vers  $f_0(x)$ . La démonstration de ce fait donnée par Rajkov est complète et élémentaire. — Dans le cas des fonctions d'une variable, l'auteur attribue le résultat ci-dessus à v. Glivenko (1936); il y a toutefois lieu d'observer que des résultats très voisins se trouvent déjà dans la mémoire classique de S. Bochner [Math. Ann., Berlin 108, 378—410 (1933); dies. Zbl. 7, 108].

R. Godement (Nancy).

## Praktische Analysis:

● Sanden, H. von: Praktische Mathematik. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 44.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1948. 100 S. mit 17 Abb. Preis 3.30 DM.

Die knapp, aber durchaus leicht lesbar gegebene, auf langjähriger Erfahrung gegründete Zusammenstellung der wichtigsten Verfahren der praktischen Mathematik enthält hauptsächlich numerische, aber auch einige graphische und instrumentelle Methoden für Darstellung von Funktionen, Interpolation, praktische Inte-



gration und Differentiation, Näherungsrechnung, harmonische Analyse sowie Statistik und Ausgleichsrechnung. Leider fehlt die vielseitig anwendbare Ermittlung von Integralen der Form  $\int_a^b f(x) dh(x)$  durch Messung von Flächeninhalten, welche ohne Vergrößerung der Seitenzahl hätte gegeben werden können. Die zweckmäßige Auswahl des Stoffes und der Beispiele sowie die zahlreichen nützlichen Winke für Anwendungen machen das kleine Buch sehr brauchbar und empfehlenswert.

*Nyström* (Helsinki).

**Aparo, Enzo:** *Sul calcolo delle radici di un'equazione algebrica.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 25—32 (1948).

Zu einigen Sätzen über Abschätzung, Separation und Berechnung der (insbes. komplexen) Nullstellen von Polynomen — dargestellt bei Picone, *Lezioni di Algebra*, Roma 1945 — werden an Hand einiger Beispiele methodische Hinweise gegeben, die geeignet sind, die praktische Handhabung zu erleichtern. *R. Schmidt.*

**Vogel, T.:** *Sur le calcul approché de certaines sommes.* C. r. Acad. Sci., Paris 224, 727—729 (1947).

Verf. behandelt eine angenäherte Methode zur Berechnung unendlicher Reihen unter besonderer Berücksichtigung derjenigen Reihen, die im Zusammenhang mit der Ermittlung der Eigenfrequenzen schwingender Platten und Membranen auftreten. Die Summen der Reihen werden angenähert durch die Auswertung gewisser Integrale ermittelt, die im Falle kreisförmiger Platten und Membranen zweckmäßig in Polarkoordinaten ausgedrückt werden. An einem Beispiel zeigt Verf., daß das Ergebnis mit einem früheren auf andere Weise erhaltenen Resultat übereinstimmt (*J. Physique Radium* 1946, 193).

*Gran Olsson* (Trondheim).

**Michlin, S. G.:** *Über die Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate.* Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 1245—1247 (1948) [Russisch].

Sia  $X$  una funzione vettoriale a  $m$  componenti, appartenente allo spazio hilbertiano  $H$  e si consideri il sistema di equazioni

$$(1) \quad L[X] = 0, \quad G[X] = B$$

essendo  $L$  e  $G$  funzioni vettoriali lineari di  $X$  definite in  $H$  e  $B$  un assegnato vettore. Indicato con  $\{\bar{X}^{(k)}\}$  un sistema di soluzioni particolari di  $L[X] = 0$ , e posto  $X^{(p)} = \sum_{k=1}^p a_k^{(p)} \bar{X}^{(k)}$  si imponga alle costanti  $a_k^{(p)}$  la condizione  $\|G[X^{(p)}] - B\| = \min$ .

Nell'ipotesi che il sistema di vettori  $\{G[\bar{X}^{(k)}]\}$  sia completo, l'Au. dà delle condizioni sufficienti perchè la successione  $X^{(p)}$  converga verso la soluzione del problema (1). Vengono considerati come casi particolari alcuni problemi al contorno per equazioni a derivate parziali lineari.

*Gaetano Fichera* (Roma).

**Wilkins jr., J. Ernest:** *An integration scheme of Maréchal.* Bull. Amer. math. Soc. 55, 191—192 (1949).

Justification of an assumption made by Maréchal in the theory for his integrator [*J. opt. Soc. America* 39, 403—404 (1947)].

*Nyström* (Helsinki).

**Deeley, E. M. and D. M. Mackay:** *Multiplication and division by electronic analogue methods.* Nature, London 163, 650 (1949).

Es handelt sich um eine elektrische Multiplikation und Division von zwei Größen  $V$  und  $H$ . Hierzu wird eine Kathodenstrahlröhre benutzt, die außer den üblichen Ablenkplattenpaaren für die Ablenkung des Strahls in Abszissen- und Ordinatenrichtung mit einer Magnetspule versehen ist, die ein veränderliches Feld  $H$  parallel zur Röhrenachse erzeugt. Dieses Feld hat eine Strahlauslenkung in Ordinatenrichtung zur Folge, wenn eine Ablenkspannung  $V$  am Plattenpaar für die Abszissenrichtung liegt. Die Auslenkung ist proportional  $H \cdot V$ . Würde man dem Ordinatenablenkplattenpaar eine geeignete Spannung  $\bar{U} = \text{const. } H \cdot V$  mitteilen, so ließe sich die Ordinatenauslenkung kompensieren. — Dies wird nun durch eine Kompensationsschaltung realisiert. Vor dem Schirm der Röhre befindet sich eine Photozelle, deren Ausgangsspannung über

einen Verstärker dem Plattenpaar für die Ordinatenauslenkung mitgeteilt wird. Diese Anordnung sorgt dafür, daß praktisch keine Ordinatenauslenkung erfolgt. Die Ausgangsspannung des Verstärkers mißt dann das Produkt  $H \cdot V$ . — Würde man die Photozelle das Magnetfeld steuern lassen und die Ablenkspannung in Ordinatenrichtung vorgeben, so würde der Quotient der beiden Ablenkspannungen gemessen werden. — Der vorstehend beschriebene Multiplikator soll in elektrischen Schaltungen benutzt werden, welche der Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen dienen. (Es handelt sich um Analoga der bekannten Integrieranlage von V. Bush). — Eine gründliche Prüfung des Multiplikators auf Fehler und Anwendungsbereich hat noch nicht stattgefunden. Vorläufige Ergebnisse ergaben einen Fehler von 2%. — Es bleibt abzuwarten, ob nicht eine Entwicklung von Potentiometerschaltungen, bei denen die Ausgangsspannung eines ersten Potentiometers ein zweites speist, zu besseren Ergebnissen bei einfacherem technischem Aufwande führt.

H. Bückner (Minden).

**Billing, H.:** Numerische Rechenmaschine mit Magnetophonspeicher. Z. angew. Math. Mech. **29**, 38—42 (1949).

Beschreibung der wesentlichen Einrichtungen eines im Göttinger Institut für Instrumentenkunde geplanten und zum Teil schon im Bau befindlichen Rechenautomaten. Neu sind an diesem u. a. die Magnetophonspeicher, in denen 12 zwanzigstellige Dualzahlen auf jeder Umfangslinie einer mit hundert Umdrehungen pro Sekunde umlaufenden, mit Magnetpulver bestreuten Walze mittels Gebemagneten eingezeichnet werden können. Damit auf verschiedenen Stellen des Umfanges aufgezeichnete Zahlen für eine Rechnung gleichzeitig zur Verfügung stehen, wird jede auf einen Gebemagneten übertragen, der sie auf einer besonderen Umfangslinie der Speichertrommel einzeichnet. Im Abstand von einer Dualzahl wird sie durch einen Empfängeragneten abgenommen, in eine Impulsfolge umgewandelt und über einen Verstärker auf den Gebemagneten zurückübertragen. Die Zahlen zirkulieren so als Impulsfolgen in diesen Stromkreisen und stehen für die gleichzeitige Einführung in den Rechnungsgang zur Verfügung.

Willers.

**Vand, V.:** A mechanical calculating machine for X-Ray structure factors. Nature, London **163**, 169—170 (1949).

Die Maschine vom Typ derjenigen zur Gezeitenberechnung gestattet es, die Strukturamplituden  $F(hkl) = \sum_i f_i \cos 2\pi(hx_i + ky_i + lz_i)$  bis zu gleichzeitig 24 Basisatomen (Index  $i$ )

als Funktion von  $l$  zu berechnen, während  $h$  und  $k$  konstant gehalten werden. Zunächst werden die Werte von  $hx_i + ky_i$  eingestellt, dann die Werte von  $z_i$ , welche die Maschine mit  $l$  multipliziert und zu ersteren addiert. Die Summenwerte werden auf Cosinus-Arme der Länge  $f_i$  übertragen und deren Ergebnisse mit Hilfe eines Differentialrollenzugs mit einer Genauigkeit von mindestens 0,2% des Wertes von  $F(000)$  addiert. Das Ergebnis kann an einer Skalenscheibe zwischen zwei Zeigern abgelesen werden. Die Endenergie reicht auch zur automatischen Registrierung mit einem Federschreiber aus, dabei kann das Vorzeichen einer Strukturamplitude durch eine nach oben bzw. unten gerichtete kleine Einbuchtung markiert werden. Die Maschine besitzt auch eine Vorrichtung zur Berechnung von Booth-Korrekturen nach dem Verfahren des Verf. (dies. Zbl. **30**, 191). Dabei sind die Werte von  $G(F_{\text{beob}} - F_{\text{ber}})$  ( $G$  = Gewichtungsfaktor) mit den Sinussen der Phasenfaktoren zu multiplizieren, was dadurch erreicht wird, daß zu  $hx + ky$  der Wert  $\pi/2$  addiert wird. Die Maschine benötigt nach Angabe des Verf. höchstens 1/30 der Zeit, welche die unmittelbare Berechnung erfordert. Die Maschine kann auch zur Fourier-synthese von Elektronendichten benutzt werden. — Durch Verwendung von normierten Bauteilen aus Bastelkästen an Stellen ohne besondere Genauigkeitsanforderungen konnten die Baukosten der Maschine bedeutend gesenkt und die Bauzeit auf 6 Monate herabgesetzt werden.

A. Kschendörfer (Stuttgart).

**Kaplan, E. L.:** Auxiliary table for the incomplete elliptic integrals. J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 11—36 (1948).

Bei der Tabellierung unvollständiger elliptischer Integrale blieben von der Erstbearbeitung Legendres in dessen Exercices (1816) bis zu Samojlova-Jakhoutova: Tables of elliptic integrals, Leningrad 1935, eine Anzahl von (über 100) Fehlern, deren sorgfältige Ausscheidung durch Neuberechnung 10-stelliger Hilfstafeln bewirkt wurde. — Von den beiden berechneten Hilfsgrößen  $c, f$  hängt z. B. die letztere mit den üblichen Bezeichnungen Legendres folgendermaßen zusammen:

$$K - F(k, \varphi) = \frac{2K'}{\pi} \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 + x^2} f,$$

wobei  $x = \cos \varphi$  und  $kr = \sqrt{1 - k^2}$ .

Wilhelm Maier (Jena).



# Klassische theoretische Physik.

## Mechanik :

**Castoldi, Luigi:** Sopra una classe di sistemi dinamici soggetti a vincoli di mobilità per cui si annullano i corrispondenti termini di anolonomia. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 19—23 (1947).

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Geschwindigkeiten werden nach einigen der  $\dot{q}_h$  aufgelöst, ( $h = 1, 2, \dots, m$ ), die anderen bekommen den Index  $\alpha$  ( $\alpha = m + 1, m + 2, \dots, n$ ). Die Bewegungsgleichungen werden in bekannter Weise aufgestellt und gefragt, wann die Glieder, die vom Nichtholonomsein herühren, verschwinden. Die Bedingungsgleichungen brauchen nicht linear zu sein. Es lassen sich vier hinreichende Bedingungen angeben, so u. a. die, daß in den  $\dot{q}_h$  die  $q_h$  nicht vorkommen und daß in der kinetischen Energie keine  $\dot{q}_\alpha \dot{q}_h$  stehen. Zum Schluß ein Beispiel: eine Scheibe, die auf einer Ebene rollt, ohne zu gleiten, doch in vertikaler Lage gehalten wird. *Hamel* (Landshut/Bayern).

**Grioli, G.:** Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 439—463 (1947).

Wenn bei einem holonomen System von  $n$  Freiheitsgraden die  $n - 1$  ersten Lagrangeschen Kräfte zeitliche Ableitungen je einer Funktion der  $n$ -ten Koordinate sind und die gesamte Leistung null ist, gibt es ein von den Geschwindigkeiten abhängiges Potential und  $n - 1$  erste Integrale. Enthält dann noch die kinetische Energie nicht die Produkte aus der  $n$ -ten Geschwindigkeit und den anderen, so bleibt nur noch eine Quadratur übrig. Der Fall liegt bei einem Kreisel vor, wenn jeder Punkt einer Kraft unterworfen ist, die das äußere Produkt aus der Geschwindigkeit und einem festen Vektor ist, so wie es bei Wirkung einer Corioliskraft oder auch bei elektromagnetischen Wirkungen vorkommt. Die Durchrechnung führt auf elliptische Integrale. *Hamel* (Landshut/Bayern).

**Bordoni, P. G.:** Moti alla Cardano di un bipendolo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 147—154 (1948).

Verf. bestimmt zwei strukturelle Beziehungen, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß bei einem Doppelpendel die Anomalien  $\varphi$  und  $\varphi_1$  der beiden Pendel bezüglich der Vertikalen in jedem Augenblick einander gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen seien; er setzt offensichtlich  $\varphi(0) = -\varphi_1(0)$ ,  $\varphi'(0) = -\varphi_1'(0)$  voraus. Für die erste dieser Relationen bleibt bei der betrachteten Bewegung der Schwerpunkt des ganzen Doppelpendels immer auf der Senkrechten, die durch den Aufhängepunkt  $P$  hindurchgeht, für die zweite wird das Moment der Bewegungsgröße bezüglich einer Achse, die durch  $P$  hindurchgeht und auf der Ebene des Systems senkrecht steht, gleich Null. Mittels des Energiesatzes führt Verf. das Problem auf Quadraturen zurück und kommt dabei zu einem hyperelliptischen Integral, das für kleine Schwingungsamplituden ein elliptisches Integral 3. Gattung wird. Schließlich berichtet Verf. über eine experimentelle Bestätigung der Ergebnisse. *Graffi* (Bologna).

**Casarini, M.:** Sul pendolo conico di lunghezza variabile. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 251—255 (1948).

Verf. zeigt mit einem Beispiel, daß im allgemeinen die anfangs kreisförmige Bahn eines konischen Pendels (das ein wenig aus der vertikalen Lage verrückt ist) sich infolge einer Änderung der Länge dieses Pendels ändert und elliptisch wird. Wenn aber die Änderung langsam und schrittweise, also adiabatisch, ist, so bleibt die Bahn kreisförmig. *Graffi* (Bologna).

**Buono, Ugo dal:** Risoluzione di un classico problema. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 248—250 (1948).

Verf. untersucht das klassische Problem der Bewegung einer schweren Kette,

die auf eine kleine Rolle aufgewickelt ist und auf der einen Seite frei, auf der anderen Seite bis auf eine horizontale, ebene Unterlage hängt. *Graffi* (Bologna).

**Manarini, Mario:** Alcune notevoli proprietà del centro d'inerzia relative alle rotazioni permanenti nella dinamica del corpo rigido con un punto fisso. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 214—219 (1948).

Wenn ein Körper um eine Achse rotiert, so daß das System der Zentrifugalkräfte einer einzigen Kraft äquivalent ist, trifft diese notwendig die Achse in einem Punkte, den Verf. Trägheitszentrum nennt. Die Geraden durch einen Punkt  $O$ , für die das Trägheitszentrum existiert, bilden einen Kegel 2. Ordnung mit der Spitze  $O$ , vom Verf. Trägheitskegel genannt. Dieser ist, wenn auf den Körper keine Kräfte wirken, der Ort der Geraden durch  $O$ , die, wenn ihr Trägheitszentrum fixiert ist, Achsen einer permanenten Rotation werden. Wenn es sich aber um einen schweren Körper handelt, der in  $O$  fixiert ist, und eine Gerade des Trägheitskegels vertikal ist, kann diese die Achse einer permanenten Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  werden, wenn ihr Trägheitszentrum unterhalb  $O$ , und zwar im Abstand  $l = g/\omega^2$  von diesem Punkte, liegt. Verf. beweist schließlich, daß das Trägheitszentrum für jede Gerade durch  $O$  existiert, wenn das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, mit der Verbindungsgeraden von  $O$  mit dem Schwerpunkt als Achse.

*Graffi* (Bologna).

**Bautin, N. N.:** Kriterien der gefährlichen und ungefährlichen Grenzen des Stabilitätsbereiches. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 691—728 (1948) [Russisch].

Dans un travail antérieur, analysé dans cette revue [cf. ce Zbl. 31, 39] l'A. avait indiqué une méthode générale pour discuter la stabilité d'un système à nombre fini  $n$  de degrés de liberté. Le présent travail est consacré à l'étude détaillée des cas  $n = 3$  et  $n = 4$ ; les calculs sont soignés et les formules obtenues se prêtent assez facilement aux applications, comme le montrent des exemples empruntés à l'électricité et à la mécanique.

*J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Maple, C. G. and J. L. Synge:** Aerodynamic symmetry of projectiles. Quart. appl. Math. 6, 345—366 (1949).

Es wird der Einfluß auf die Kraftwirkung bei einem Geschoß untersucht, wenn dessen Oberfläche eine diskrete  $n$ -gliedrige Gruppe von Drehungen gestattet oder aber eine Spiegelung zu einer Ebene durch dieselbe Drehachse. Kraft und Moment werden nach Potenzen zweier komplexen Variablen in dieser Ebene und ihrer Konjugierten entwickelt. Es werden dann von den Koeffizienten der Entwicklung einige verschwinden, was für mehrere  $n$  in Tabellen angegebenen werden kann. Alle Kraftgrößen hängen von sechs Variablen ab, von drei Geschwindigkeitskomponenten und drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit; in beiden Tripeln wird, wie angegeben, gearbeitet. Die axialen Komponenten von Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit bleiben unentwickelt in den Koeffizienten stehen. Zum Schluß Stabilitätsuntersuchungen.

*Hamel* (Landshut/Bayern).

## Wärmelehre:

**Sestini, Giorgio:** Sopra un problema ai limiti in un caso non stazionario di propagazione del calore. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 464—477 (1947).

Verf. untersucht in einem Kreiszyylinder  $S_1$  und in einem koaxialen zylindrischen Rohr  $S_2$  die nicht stationäre Fortpflanzung der Wärme, die von auf der Trennungsfläche  $S$  von  $S_1$  und  $S_2$  gelegenen Quellen erzeugt wird. Das System wird als axialsymmetrisch vorausgesetzt, die von den Quellen in jedem Zeitintervall emittierte Wärme ist bekannt, die Anfangstemperatur ist überall Null. Das Problem wird auf eine Volterrasche Integralgleichung zurückgeführt, und es wird auch eine Methode, zu einer angenäherten Lösung zu gelangen, angegeben.

*Graffi*.



**Dacey, A. B.:** Über die lineare Aufgabe von Stefan. Doklady Akad. Nauk. SSSR, II. s. 58, 563—566 (1947) [Russisch].

Il lavoro è dedicato al problema analitico consistente nel determinare il modo di propagarsi del calore in due mezzi infiniti, che si trovano in contatto e che rappresentano due fasi di uno stesso corpo. *Gaetano Fichera* (Roma).

**Kaempffer, Friedrich:** Zur Theorie des idealen Bose-Einstein-Gases. Z. Physik 125, 359—369 (1949).

Bei einem idealen Bose-Gas fällt nach Einstein beim Unterschreiten einer bestimmten Temperatur, der sogenannten Kondensationstemperatur  $T_0$ , bekanntlich ein Teil der Gasteilchen dadurch aus, daß sich ein endlicher Bruchteil aller Gasteilchen im tiefsten Quantenzustand befinden, und daß somit nur die restlichen Teilchen (und zwar  $N_{\text{eff}}$  Teilchen) an der Wärmebewegung des Gases teilhaben. Zunächst gibt Verf. allein durch Anwendung der Unbestimmtheitsrelation die Werte von  $T_0$  und  $N_{\text{eff}}$  im nichtrelativistischen und im relativistischen Fall (bis auf Zahlenfaktoren) richtig an. Dann wird am Beispiel eines Gases in einem würfelförmigen Kasten gezeigt, daß sich das ideale Bose-Gas aus  $N$  Teilchen für alle Temperaturen durch die gleiche Zustandsgleichung beschreiben läßt wie ein ideales Boltzmann-Gas aus  $\alpha N_{\text{eff}}$  Teilchen, wobei  $\alpha$  einen konstanten, angebbaren Zahlenfaktor der Größenordnung 1 bedeutet. *F. Sauter* (Göttingen).

**Kaempffer, Friedrich:** Zur Thermodynamik der Materiewellen. Z. Physik 125, 487—496 (1948).

Ein ideales Gas aus Teilchen mit Bosestatistik hat unterhalb der „Einsteinischen Kondensationstemperatur“ eine von der Temperatur abhängige Energiedichte  $u$ , wie sie die Hohlraumstrahlung für alle Temperaturen hat. Wegen dieser Analogie läßt sich für tiefe Temperaturen innerhalb einer klassischen Wellentheorie der Materie der dem Kirchhoffschen Gesetz entsprechende Satz begründen, der dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz entsprechende Satz in der Form  $u \sim T^{5/2}$  angeben und das „Wiensche Verschiebungs-Gesetz“  $u_\nu(\nu, T) = \nu^{3/2} f(\nu/T)$  herleiten. Das „Plancksche Gesetz“ folgt durch Abzählung der Eigenschwingungen mit der mittleren Energie der gequantelten Eigenschwingungen. *F. Hund* (Jena).

**Kac, M.:** Random walk and the theory of Brownian motion. Amer. math. Monthly 54, 369—391 (1947).

Es wird eine mathematische Theorie der (eindimensionalen) Brownschen Molekularbewegung entwickelt — ähnlich der von Einstein und Smoluchowski — und zwar unter der Annahme diskontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsfunktionen; die zugehörigen Differenzgleichungen gehen nach einem geeigneten Grenzübergang in die Differentialgleichungen von Einstein und Smoluchowski über. Neben dem freien Teilchen wird im besonderen das elastisch gebundene Teilchen behandelt. Den Abschluß bildet eine Erörterung des Wiederkehrsatzes von Poincaré im Rahmen der vorgelegten Theorie. *H. Müller* (Mainz).

### Elektrodynamik:

**Smythe, W. R.:** The double current sheet in diffraction. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 72, 1066—1070 (1947).

Verf. weist nach, daß die elektromagnetische Strahlung durch eine Öffnung in einem ebenen, vollkommen leitenden Schirm hindurch identisch ist mit der Strahlung, die bestehen würde, wenn Schirm und Öffnung durch eine doppelt elektrische Stromschicht mit einem geeigneten Verteilungsgesetz am Orte der Öffnung ersetzt werden. In den beiden Lagen der Schicht hat die Stromdichte entgegengesetzt gleiche Werte. Für das Vektorpotential, das das Strahlungsfeld der Doppelschicht beschreibt, wird ein exakter Ausdruck angegeben. Die Wirksamkeit des Verfahrens wird am Beispiel der Berechnung des elektromagnetischen Feldes erläutert, das bei der Ankoppelung einer koaxialen Leitung an einen Hohlleiter von rechteckigem

Querschnitt entsteht. Von der koaxialen Leitung wird dabei angenommen, daß sie senkrecht in eine der Seitenflächen des rechteckigen Hohlleiters einmündet, wobei der Mittelleiter in der Ebene der Wand endet. — Für eine einfache Schicht magnetischer Ströme, die hinsichtlich der äußeren Feldkonfigurationen mit einer Doppelschicht elektrischer Ströme gleichwertig ist, ist im übrigen die theoretisch vorhandene Möglichkeit, mit ihrer Hilfe in befriedigender Weise den Einfluß von Öffnungen in Schirmen und anderen Begrenzungsflächen wiederzugeben, schon früher erkannt worden.

*H. Buchholz* (Darmstadt).

**Rydbeck, O. E. H.:** On the forced electro-magnetic oscillations in spherical resonators. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 39, 633—644 (1948).

Es wird das Feld der *TE*- und *TM*-Wellen zwischen zwei konzentrischen, vollkommen leitenden Kugeln berechnet. Das *TE*-Feld wird erregt gedacht durch eine kleine elektrische Stromschleife, die senkrecht auf einem Kugelradius steht. Im Falle des *TM*-Feldes wird das Feld durch einen elektrischen Dipol in Richtung eines Kugelradius erzeugt gedacht. Es werden genauer untersucht, nachdem die allgemeinen Lösungsgleichungen aufgestellt worden sind: die Resonanzeigenschaften, die Werte des *Q*-Faktors und die Koppelimpedanzen zweier Stromschleifen.

*H. Buchholz* (Darmstadt).

**Malvano, R.:** Guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare compresa tra due piani metallici paralleli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 155—161 (1948).

Der Bereich zwischen zwei vollkommen leitenden, parallelen Ebenen werde zum Teil von einer dielektrischen Führung, d. h. von einem unendlich langen Prisma mit rechteckigem Querschnitt, mit zwei die beiden Ebenen berührenden Seitenflächen, eingenommen; der Rest des Bereichs sei von einem anderen Dielektrikum erfüllt. Durch Lösung der Maxwellschen Gleichungen, mit gewöhnlichen Randbedingungen, werden die harmonischen elektromagnetischen Wellen bestimmt, die sich parallel zur Achse der Führung fortpflanzen, also, wenn *z* parallel zu dieser Achse ist, die Wellen, die von dieser Koordinate gemäß dem Faktor  $e^{-i\beta z}$  ( $\beta$  = Konstante,  $i$  = imaginäre Einheit) abhängen. Es folgt eine breite Diskussion der Ergebnisse, in der klar gemacht wird, daß sich die Führung in gewissen Fällen wie ein Dielektrikum, in anderen wie ein Leiter verhalten kann.

*Graffi* (Bologna).

**Astbury, N. F.:** The moving coil galvanometer as a circuit element. Proc. phys. Soc. London 60, 590—597 (1948).

Es werden in der Arbeit die Bewegungsgleichungen eines Galvanometers im magnetischen Feld der Galvanometerspule mit der Stromkreisgleichung zu einem Operator der Bewegungsimpedanz vereinigt, wodurch nach Ansicht des Verf. beträchtliche Vereinfachungen bei der weiteren Durchrechnung erzielt werden. Der Gebrauch der Formeln wird an Beispielen erläutert. So wird unter anderem das Rauschniveau des Galvanometers bestimmt, worunter die unvermeidlichen Ablenkungen durch spontane Spannungsschwankungen im Stromkreis verstanden werden.

*Herbert Buchholz* (Darmstadt).

**Nasse, G.:** Sur les lois générales du circuit de régulation et leur comparaison à celles du circuit électrique. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 788—790 (1947).

Unter „circuit de régulation“ versteht Verf. eine Reihe von Elementen, die aus Zweigen und Gittern im Vergleich zum elektrischen Stromkreis bestehen. Die in Betracht kommenden Elemente können in zwei verschiedene Gruppen eingeteilt werden, nämlich: 1. halbfreie Elemente, die reguliert werden sollen, 2. abhängige Elemente, wozu die Regulatoren gehören. Die grundlegenden Gleichungen können geschrieben werden

$$I(\varrho) = \frac{1}{P_L} I(\gamma) + (I)_L \quad \text{für die halbfreien Elemente und}$$

$$I(\sigma) = P_D I(\varepsilon) - \frac{(I)_D}{\varphi_\sigma} \quad \text{für die abhängigen Elemente.}$$



$\varrho$  und  $\gamma$  bezeichnen den reduzierten Wert am Anfang bzw. am Ende eines halbfreien Elements,  $\varepsilon$  und  $\sigma$  die entsprechenden Werte eines abhängigen Elements. Hiervon ausgehend stellt Verf. die Bedingung auf, die „un circuit de regulation“ sichern. Einen entsprechenden Satz für den elektrischen Stromkreis gibt es nicht. Weiter gibt Verf. zwei Sätze an, die eine Analogie zu den Sätzen von Kirchhoff für den elektrischen Stromkreis bilden.

Gran Olsson (Trondheim).

### Relativitätstheorie:

Kar, S. C.: Die Lorentztransformation und ihr physikalischer Inhalt. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 83—106 (1948).

Die räumliche und zeitliche Entfernung eines Gegenstandes wird durch die Parallaxe definiert bei Annahme einer konstanten Lichtgeschwindigkeit. Unter den üblichen Voraussetzungen lassen sich die Gleichungen der Lorentz-Transformation ableiten. Dabei braucht die Voraussetzung der konstanten Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter nur für die kurze Zeit gemacht zu werden, in der das Licht die Basis der Parallaxenbestimmung durchläuft. (Über Gültigkeit und Sinn der Transformation, wenn die Relativgeschwindigkeit darüber hinaus nicht konstant ist, wird nichts gesagt.)

F. Hund (Jena).

Mosharrafa, A. M.: The metric of space and mass deficiency. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 39, 729—738 (1948).

L'A. introduit, sur l'espace temps, la métrique  $ds$  définie par

$$g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu + 2f_\lambda dx^\lambda ds - ds^2 = 0$$

et détermine les géodésiques correspondantes. Celles-ci peuvent être interprétées comme donnant les trajectoires spatio-temporelles de certaines particules chargées dans un champ gravitationnel et électromagnétique, ce qui est bien connu lorsqu'on écrit la métrique précédente sous la forme  $ds = f_\lambda dx^\lambda \pm \sqrt{(g_{\lambda\mu} + f_\lambda f_\mu) dx^\lambda dx^\mu}$ . La masse  $m$  d'une particule se trouve liée à l'énergie potentielle par  $m/m_0 = c dt/ds$  ce qui donne en première approximation  $m = m_0(1 - e\varphi/m_0 c^2)$  ( $\varphi$  potentiel scalaire). L'A. s'efforce d'expliquer ainsi le défaut de masse des noyaux comme venant de la présence de leurs composantes chargées dans le champ nucléaire. Une étude de ce champ pour 37 éléments, à partir de données expérimentales sur les masses, complète ce papier.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Hoffmann, Banesh: The gravitational, electromagnetic, and vector meson fields and the similarity geometry. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 73, 30—35 (1948).

In der Arbeit wird ein Spezialfall der allgemeinen konformen Geometrie betrachtet: es handelt sich um die geometrischen Gebilde, die invariant bleiben bei Transformationen des metrischen Fundamentaltensors  $g_{ab}(x^c)$  von der Form:  $g_{ab}(x^c) \rightarrow k^2 g_{ab}(x^c)$ , wo  $k$  eine Konstante bedeutet. Ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe  $S_{\sigma\tau}$  wird definiert für einen Raum von 6 Dimensionen ( $\sigma, \tau = 0, 1, \dots, 5$ ); für ihn soll gelten:  $S_{05} = 0$ ;  $S_{55}/S_{00}$  ist unabhängig von den Koordinaten  $x^a$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ ). Die Komponenten  $S_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$ ) dieses Tensors bilden einen projektiven Tensor im Raum von 5 Dimensionen. Aus einem Variationsprinzip für den 4-dimensionalen Raum, welches den Krümmungsskalar von  $S$  enthält, leitet Verf. die Feldgleichungen ab. Sie bestehen erstens aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, wobei die Tensoren des Schwerefeldes, des elektromagnetischen und des Meson-Vektor-Feldes additiv nebeneinander erscheinen; zweitens aus den Maxwell-Gleichungen für materiefreies Feld in allgemein relativistischer Schreibweise; drittens aus den Meson-Vektor-Feldgleichungen im materiefreien Raum, ebenfalls allgemein relativistisch geschrieben. Verf. hält es für möglich, daß ein Aufgeben der einschränkenden Bedingungen für  $S$  erlauben wird, noch andere Felder im Rahmen dieser Theorie zu beschreiben.

Bechert (Mainz).

**Jordan, P.: Der Zusammenhang der vier- und fünfdimensionalen Metrik.** Ann. Physik, VI. s. 3, 153—155 (1948).

Es werden kurz die formalen Beziehungen zwischen der projektiven fünfdimensionalen Metrik (in homogenen Koordinaten) der neuen Gravitationstheorie des Verf. und der gewöhnlichen vierdimensionalen Metrik abgeleitet. *Dieckvoß.*

## Atomphysik.

### Quantenmechanik:

**Bauer, Hans und J. Hans D. Jensen: Zur Strahlungsdämpfung des Oszillators.** Z. Physik 124, 580—585 (1948).

Aus den Eigenfunktionen im Oszillatorpotential wird mit Koeffizienten, deren Quadrate eine Poisson-Verteilung bilden, ein Wellenpaket in Form einer Gaußschen Glockenkurve aufgebaut. Nach der Methode von Weißkopf und Wigner [Z. Physik 63, 54—73 (1930) und 65, 18—29 (1930)] wird die Kopplung mit dem Strahlungsfeld eingeführt. Es zeigt sich, daß sich die Differentialgleichung für die Koeffizienten  $a(n, \dots, N_s, \dots, t)$  [ $n$  = Quantenzahl der Eigenfunktion,  $N_s$  = Besetzungszahlen des Strahlungsfeldes] durch den Ansatz

$$a(n, \dots, N_s, \dots, t) = \frac{((\alpha x_0^0 / \sqrt{2}) e^{-\gamma t/2})^n}{\sqrt{n!}} \cdot b(\dots, N_s, \dots, t)$$

separieren läßt, woraus sich die Bestätigung des von F. Bloch [Physik. Z. 29, 58—66 (1928)] aufgestellten Satzes ergibt, daß auch unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung das Wellenpaket im Oszillatorpotential beisammen bleibt. *Volz.*

**Balseiro, José A.: Über eine kanonische Transformation des Strahlungsfeldes.** Rev. Un. mat. Argentina 13, 106—119 (1948) [Spanisch].

Ein Strahlungsfeld kann man durch die Oszillator-Eigenfunktionen darstellen, weil es einem System ungekoppelter Oszillatoren entspricht. Die zugehörigen kanonischen Variablen sind Impuls  $p$  und Koordinate  $q$  der Oszillatoren. Man kann es aber auch darstellen in den kanonischen Variablen der Besetzungszahl  $N$  und dem zugehörigen Winkel  $\vartheta$ . Verf. stellt sich die Frage, die Eigenfunktionen  $e^{\pm i n \vartheta}$  für die letztere Darstellung und die Transformation von der ersten zur zweiten Darstellung zu untersuchen. Es zeigt sich: die einen Eigenfunktionen,  $e^{-i n \vartheta}$ , entsprechen den Oszillator-Eigenfunktionen mit reeller Koordinate  $q$ , sie gehören zu positiver Energie; die anderen Eigenfunktionen  $e^{i n \vartheta}$  entsprechen den Oszillator-Funktionen mit rein imaginärer Koordinate  $q$ , sie gehören zu negativer Energie. *Bechert (Mainz).*

**Balseiro, José A.: Der Drehimpuls des Strahlungsfeldes.** Rev. Un. mat. Argentina 12, 153—167 (1947) [Spanisch].

Der gesamte Drehimpuls eines elektromagnetischen Feldes wird aus der üblichen Definition berechnet für ein Feld, das nur ein Photon enthält; Erweiterung auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Photonen; Zusammensetzung des Drehimpulses zweier Photonen. Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß 2 Lichtquanten von 2 verschiedenen Atomen absorbiert werden, die Drehimpulserhaltung bei der Emission im schwachen äußeren Magnetfeld, Versuch einer Zerlegung des Drehimpulses in Bahn-Impuls und Spin-Impuls. *Bechert (Mainz).*

**Eliezer, C. Jayaratnam: On the classical theory of particles.** Proc. R. Soc. London A 194, 543—555 (1948).

Dirac hat (vgl. dies. Zbl. 23, 427) eine Abänderung der klassischen Theorie eines punktförmigen Elektrons gegeben, die die unendliche Selbstenergie vermeidet, aber eigenartige Lösungen der Bewegungsgleichungen zuläßt. In Anlehnung daran, aber davon verschieden, wird hier eine Abänderung versucht, die einem ausgedehnten Elektron entspricht, und die Ladungsverteilung so gewählt, daß die Bewegungsgleichung eine einfache Form bekommt. Für homogenes elektrisches Feld treten in



nichtrelativistischer Näherung erwartete Ergebnisse auf, für die Streuung von Licht am Elektron Abweichungen von früheren Theorien. Es gibt eine relativistische Verallgemeinerung, die befriedigende Eigenschaften hat. *F. Hund (Jena).*

**McManus, H.:** *Classical electrodynamics without singularities.* Proc. R. Soc. London A **195**, 323—336 (1948).

Eine klassische Theorie des Elektrons wird in der Weise aufgestellt, daß in der Lagrange-Dichte das Wechselwirkungsglied zwischen Feld und Stromvierervektor, das sonst einem punktförmigen Elektron entspricht, durch ein solches ersetzt wird, das eine Art Ausdehnung des Elektrons bedeutet. Die Bewegungsgleichung wird eine Integrodifferentialgleichung. In gewissen Grenzfällen liefert sie die gleichen Bewegungen wie frühere Theorien. Für stärkere Beschleunigungen ergeben sich Abweichungen. Der Zusammenhang mit der Untersuchung von Eliezer (s. vorangeh. Referat) ist noch nicht untersucht. *F. Hund (Jena).*

**David, Erwin:** *Zum Elektronenradius.* Z. Physik **125**, 274—275 (1949).

Die von W. E. Lamb und R. L. Retherford [Physic. Rev., Minneapolis, II. s. **72**, 241 (1947)] gefundenen Energieverschiebung des 2S-Niveaus von Wasserstoff gegenüber dem 2P-Niveau, die um  $0,033 \text{ cm}^{-1}$  von dem Wert der Diracschen Theorie abweicht, wird durch einen endlichen Elektronenradius zu deuten gesucht. Dieser ergibt sich in naher Übereinstimmung mit dem aus dem magnetischen Moment des Elektrons sich bestimmenden „klassischen“ Elektronenradius zu etwa  $7 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ . Bei den inneren Schalen höherer Atome würde sich ein solcher Radius schon bemerkbar machen und eine Verschiebung der Abschirmungszahl größenordnungsmäßig um 1 Einheit zur Folge haben. Vergl. dazu die Arbeit von Caldirola (dies. Zbl. **30**, 425).

*Volz (Erlangen).*

**Pais, A.:** *On the theory of elementary particles.* Verh. Nederl. Akad. Wet., Afd. Natuurk., I. Sect. **19**, 91 S. (1947).

In dieser Arbeit wird über den Stand des Selbstenergieproblems der Elementarteilchen berichtet und ein Vorschlag zu seiner Lösung entwickelt. Verf. weist darauf hin, daß eine Beseitigung der Schwierigkeiten der klassischen Theorie nicht unbedingt den richtigen Ausgangspunkt darstellt, weil bei der Quantelung neue Divergenzen auftreten. Sein Ansatz besteht darin, daß er die Elementarteilchen als Punktquellen mehrerer Felder ansieht, deren unendliche Beiträge zur Selbstenergie sich bis auf einen endlichen Wert kompensieren. (Vgl. E. G. C. Stueckelberg). Im ersten Kapitel wird die Selbstenergie für Teilchen vom Spin  $\frac{1}{2}$  mit den verschiedenen Ansätzen für den Wechselwirkungsoperator behandelt, und zwar sowohl für die Ein-Teilchen-Theorie als auch für die Löchertheorie. Ein besonderer Abschnitt geht auf Selbstenergien höherer Ordnung ein. Im Kapitel II, das dem Elektron gewidmet ist, betont Verf. den Unterschied zwischen den (im wesentlichen) unitären klassischen Theorien und dem nichtunitären Charakter der Quantentheorie. Vom Elektron geht außer dem gewöhnlichen  $e$ -Feld noch ein skalares  $f$ -Feld kurzer Reichweite aus. Wenn diese gleich dem klassischen Elektronenradius gesetzt wird, stellt die aus dem Feld herrührende Selbstenergie nur einen kleinen Beitrag zur Elektronenmasse dar. In Kapitel III wird gezeigt, daß die Methode auch auf Nukleonen anwendbar ist, wenn man ein neutrales skalares  $F$ -Feld einführt, dessen Reichweite kürzer als die der üblichen Mesonfelder ist. Abschließend weist Verf. in Kapitel IV auf experimentelle Prüfungsmöglichkeiten hin. *Möglich.*

**Ramsey, W. H.:** *On Schwinger's theory of nuclear forces.* Proc. phys. Soc. London **61**, 297—299 (1948).

Es wird gezeigt, daß die von J. Schwinger [Physic. Rev., Minneapolis, II. s. **61**, 387 (1942)] eingeführte Verallgemeinerung der Theorie von C. Möller und L. Rosenfeld [Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. **17**, No. 8, (1940)] nicht geeignet ist, um gleichzeitig das Quadrupolmoment des Deuterons und die Proton-Proton-Streuung richtig zu beschreiben.

*Volz (Erlangen).*

**Holmberg, Bengt:** On the interaction of neutrons with electrons. Ark. Mat. Astron. Fysik A 36, Nr. 6, 15 S. (1948).

Über die Wechselwirkung von langsamen Neutronen mit Elektronen liegen Versuche von Havens, Rabi und Rainwater, Fermi und Marshall vor. Theoretische Untersuchungen sind auf Grund der symmetrischen Mesontheorie bis zur ersten Näherung von Marshall und Fermi und in höherer Näherung von Jauch und Watson durchgeführt worden. Die vorliegende Arbeit führt eine genauere Untersuchung der ersten Näherung unter der Annahme eines pseudoskalaren geladenen Mesonfeldes durch. Unter der Voraussetzung sehr kleiner Teilchengeschwindigkeiten und sehr großer Neutronen- und Elektronenmasse liefert die Berechnung eine statische Wechselwirkung zwischen Neutronen und Elektronen, die infolge der Einführung eines Minimalabstandes zur Herbeiführung der Konvergenz der Integrale nicht frei von Willkür ist. Der Vergleich mit den Experimenten macht die Annahme einer ungewöhnlich schwachen Mesonfeld-Nucleon-Kopplung erforderlich. *Ecker (Bonn).*

**Bruno, B.:** The capture of mesons. Ark. Mat. Astron. Fysik A 36, Nr. 8, 44 S. (1948).

Die vorliegenden Experimente über den Zerfall und die Einfangung von Mesonen im Innern eines Absorbers führen zu der Annahme, daß positive Mesonen praktisch gar nicht eingefangen werden, während für negative Mesonen die Einfangwahrscheinlichkeit mit wachsender Kernladungszahl zunimmt. Die theoretische Behandlung dieser Erscheinung liefert bei der üblichen Kopplungsstärke zwischen Mesonfeld und Nucleon wesentlich zu große Einfangwahrscheinlichkeiten. Die vorliegende Arbeit versucht unter Vermeidung zusätzlicher Annahmen die Schwierigkeiten durch eine Diskussion der rechnerischen Unsicherheit zu beseitigen. Dabei beschränkt sie sich auf den Fall der Einfangung eines negativen Mesons von ganzzahligem Spin durch ein Proton, welches im Hauptteil der Arbeit als in einem  $\alpha$ -Teilchen gebunden angenommen wird. *Ecker (Bonn).*

### Bau der Materie:

**Heisenberg, W.:** Thermodynamische Betrachtungen zum Problem der Supraleitung. Ann. Physik, VI. s. 3, 289—296 (1948).

Nach den früheren Arbeiten des Verf. zur Supraleitung [W. Heisenberg, Z. Naturforsch. IIa, 185 (1947) und IIIa, 65 (1948)] ist zu erwarten, daß in einem freien Elektronengas ein Bruchteil  $w$  der Oberfläche der Fermikugel eine Kondensation erfährt, wobei weiter außen liegende Zustände des Impulsraums besetzt werden. Die Veränderung der Zahl der freien Elektronenzustände führt zu einer freien Energie der Form  $f = -A w - \frac{\gamma}{2} T^2 \sqrt{1-w}$ , die als Funktion von  $w$

ein Maximum werden muß. Dies führt zu dem Wert  $f = -A \left[ 1 + \left( \frac{T}{T_s} \right)^4 \right]$ ,

$T_s^2 = \frac{4A}{\gamma}$ , woraus sich der Gang der spezifischen Wärme mit  $T^3$  in Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt. Dieses Ergebnis ist unabhängig von dem speziellen Mechanismus der Kondensation. — Die Wechselwirkung mit dem Ionengitter führt zur Auszeichnung bestimmter Kristallrichtungen in Übereinstimmung mit Born und Cheng [Nature, London 161, 968—969 (1948); dies. Zbl. 30, 334]. — Die Annahme eines echten thermodynamischen Gleichgewichts zwischen supraleitender und gewöhnlicher Elektronenphase hat die Gleichheit der mittleren partiellen Energie pro Elektron zur Folge, auch wenn verschiedene Supraleiter aneinandergrenzen. Durch Temperaturdifferenzen können sich im Supraleiter Thermospannungen bis höchstens  $10^{-8}$  Volt einstellen. Der dabei fließende Strom ist, da es sich um ein thermodynamisches Gleichgewicht handelt, automatisch Suprastrom.



Eine Abschätzung zeigt, daß die spezifische Wärme der supraleitenden Phase praktisch vernachlässigbar ist. — Für den Meißnereffekt wird die Erweiterung der Londonschen Gleichung auf den rotierenden Supraleiter gegeben in der Form

$$\operatorname{rot}(\lambda \dot{j}) = -\frac{1}{c} \mathfrak{B} + \frac{2m}{e} \mathbf{v},$$

wo  $\mathbf{v}$  die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Demnach ist das Innere nicht feldfrei, sondern es herrscht dort die konstante Feldstärke  $\mathfrak{B} = \frac{2mc}{e} \cdot \mathbf{v}$ . Volz.

**Laue, M. v.:** Supraleitung und Kristallklasse. Ann. Physik, VI. s. 3, 40—42 (1948).

Bei der Aufstellung des Londonschen Spannungstensors, der die Kraft des Magnetfeldes auf den Supraleitungsmechanismus aufnimmt und auf die Oberfläche des Leiters überträgt, stellt sich heraus, daß die Symmetrieforderung  $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$  für den Tensor  $\lambda$  notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Aufstellung eines erweiterten Impulssatzes ist. Die daraus entspringende Kraftfreiheit des Innern ist notwendige Bedingung für die Existenz von Dauerströmen. Es wird gezeigt, daß bei allen bekannten Supraleitern die Symmetrieeigenschaften der Klasse diese Symmetrie des Tensors verbürgen. Damit scheint sich ein wenn auch loser Zusammenhang zwischen Supraleitung und Kristallklasse zu ergeben.

Volz (Erlangen).

**Kohler, Max:** Transporterscheinungen im Elektronengas. Z. Physik 125, 679—693 (1949).

Zur theoretischen Behandlung der Transportphänomene in Metallen hat man sich bisher mit Interpolationsformeln zwischen den Lösungen der Blochschen Integralgleichung für extrem hohe und extrem tiefe Temperaturen beholfen. Durch Umformung der Blochschen Integralgleichung in ein Variationsproblem und Lösung desselben nach dem Ritzschen Verfahren gelingt es nun dem Verf., eine in fortlaufenden Schritten immer besser werdende Approximation für die Lösung dieser Integralgleichung, bzw. für die bei den Transportgrößen benötigten Funktionen zu finden. Angewandt werden diese Entwicklungen zur Berechnung des elektrischen Widerstandes für Metalle ohne und mit Restwiderstand bis zur dritten Näherung, wobei sich die Grüneisen-Blochsche Widerstandsformel (als erste Näherung) und die Mathiessensche Regel ergeben; ferner zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit bis zur zweiten Näherung, wodurch man zu einer bereits von A. H. Wilson interpolatorisch gefundenen Formel gelangt; und schließlich zur Bestimmung der Thermokraft ebenfalls in zweiter Näherung.

F. Sauter (Göttingen).

**Wohlfahrt, E. P.:** Exchange integral with 3d wave functions. Nature, London 163, 57—58 (1949).

Bei der Berechnung von Molekülenergien nach Heitler-London wurde das Austauschintegral berechnet, wenn die Wellenfunktionen der getrennten Atome vom 3-d-Typ, jedoch mit sphärischer Symmetrie  $\psi = N \cdot r^2 \exp(-\alpha r)$  gewählt wurden. Für den gesamten Bereich der in Frage kommenden Kernabstände ergab sich das Austauschintegral mit negativem Vorzeichen. Nach qualitativen Betrachtungen früherer Autoren hätte man in diesem Fall eher positives Vorzeichen erwartet. Die Folgerungen aus dem Ergebnis für den Ferromagnetismus werden in einer späteren Arbeit untersucht.

Volz (Erlangen).

**Förster, Th.:** Zwischenmolekulare Energiewanderung und Fluoreszenz. Ann. Physik, VI. s. 2, 55—75 (1948).

Die quantenmechanische Theorie der Energiewanderung in Lösungen fluoreszierender Stoffe wird im Anschluß an F. Perrin weiter ausgebaut. Insbesondere wird der Verlauf des Absorptions- und Fluoreszenzspektrums genauer berücksichtigt, wodurch gute Übereinstimmung mit den Messungen erreicht wird.

Möglich (Berlin).

**Artmann, Kurt:** Zur Theorie der Kikuchi-Enveloppen. IV: Rechnerische Durchführung zu Teil II: Der Fall des dreifach periodischen Potentialfeldes. *Z. Physik* **125**, 298—335 (1949).

In Teil III [dies. Zbl. **31**, 48] war zur Berechnung der Kikuchi-Enveloppen ein einfach periodisches Potential zugrunde gelegt worden. Im vorliegenden Teil IV wird die Rechnung durch Lösung der zugehörigen Schrödingergleichung nach der Methode von Bethe für ein dreifach periodisches Potential, wie es in Wirklichkeit vorliegt, durchgeführt. Dabei wird der Beweis erbracht, daß eine flach aus dem Kristall austretende Elektronenwelle praktisch nur von dem über die zur Oberfläche parallelen Ebenen gemittelten Potentialverlauf beeinflußt wird. Daraus ergeben sich unmittelbar die in den vorhergehenden Teilen gegebenen Erklärungen für das Zustandekommen der Oberflächenenveloppen, deren Intensität hier näherungsweise berechnet wird. Es wird gezeigt, daß bei flach austretenden Wellen ein Vielstrahlproblem vorliegt, d. h. nicht nur eine Welle überragende Intensität gegenüber den andern besitzt, was von Lamla [Ann. Physik, V. s. **32**, 178 (1938)] nicht beachtet worden ist, weshalb in seinen Rechnungen die beschriebene Erklärung der Kikuchi-Enveloppen nicht enthalten war. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

**Artmann, Kurt:** Zur Theorie der Kikuchi-Bänder. *Z. Physik* **125**, 225—249 (1949).

Wie Verf. bereits früher [dies. Zbl. **31**, 47, 48 und vorst. Ref.] qualitativ erklärt hat, entstehen die Kikuchi-Bänder durch diejenigen der Elementarwellen, in welche eine unelastisch gestreute Kugelwelle zerlegt werden kann, die auf eine niedrig indizierte Netzebene flach, d. h. unter einem kleineren als dem 1. Bragg'schen Winkel auffallen. Diese Wellen werden nämlich schon durch eine einzelne dieser Netzebenen nahezu total reflektiert, während die nicht flach auftreffenden Wellen eine einzelne Netzebene praktisch ungehindert durchsetzen. In der vorliegenden Mitteilung wird diese Theorie mit Hilfe des Laueschen Reziprozitätssatzes quantitativ durchgeführt (über die entsprechenden Berechnungen der Kikuchi-Enveloppen vgl. oben genannte Referate). Für den Intensitätsverlauf quer zu einem Kikuchi-Band ergibt sich  $S = 1 + 4 \exp(-k_x^2 L^2) - 2\sqrt{2} \exp(-k_x^2 L^2/2)$ , wo  $k_x$  die Komponente des Wellenvektors in der Normalenrichtung  $x$  der reflektierenden Netzebenen und  $L \sim a/6$  ( $a$  Netzebenenabstand) eine den Potentialverlauf in der Umgebung einer Potentialmulde kennzeichnenden Länge bezeichnen. Die früheren Theorien von K. Shinotara [Sci. Papers Inst. phys. chem. Res., Tokio **18**, 223 (1932)] und A. G. Emslie [Physic. Rev., Minneapolis, II. s. **45**, 43 (1934)] werden diskutiert. Verf. gelangt zu dem Ergebnis, daß bei ersterer die Annahme freier Elektronen unzulässig ist und bezüglich letzterer erst noch näher untersucht werden muß, ob der Energieaustausch zwischen den Elektronen und den thermischen Gitterschwingungen für die Kikuchi-Bänder von Bedeutung ist, nachdem es gelungen ist, die nahe verwandten Erscheinungen der Kikuchi-Enveloppen ohne Berücksichtigung desselben zu erklären. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

**Fues, E.:** Zur Deutung der Kossel-Möllenstedtschen Elektroneninterferenzen konvergenter Bündel an dünnen Plättchen. II. *Z. Physik* **125**, 531—538 (1949).

Nach einer früher mitgeteilten Theorie des Verf. [Ann. Physik, V. s. **43**, 538 (1943)] ergeben sich die von Kossel und Möllenstedt mit konvergenten Strahlen erhaltenen streifenförmigen Elektroneninterferenzen als eine Folge der Ewaldschen Pendellösung im Kristall. In der vorliegenden Mitteilung werden die Ergebnisse einer eingehenden Berechnung, die noch veröffentlicht werden wird, mitgeteilt. Der Verlauf der Streifen und ihre gegenseitige Verschiebung beiderseits der sie durchsetzenden Kikuchi-Linie ist demnach bestimmt durch eine Konstante  $c = \tau k D/2$  ( $\tau$  Proportionalitätsfaktor der Strukturamplitude der Kikuchi-Linie,  $k$  Wellenzahl der Elektronenwellen,  $D$  Kristalldicke) und die Funktion  $\Phi = \varphi_1 + 2\varphi_2$



der Phasen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der betrachteten Interferenz und der Kikuchi-Linie. Form und Verschiebung der Streifen hängen empfindlich von  $c$  und  $\Phi$  ab, gute Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden ergibt sich für  $c \sim 2,0$  und  $\Phi \sim 0$ . Zur weiteren Bestätigung der Theorie wäre es erwünscht, Kreuzungen von Streifen und Kikuchi-Linien mit wesentlich verschiedenen Strukturamplituden zu untersuchen. Die Vorgänge, wie sie sich auf Grund der dynamischen Theorie ergeben, können an Hand derjenigen bei gekoppelten Pendeln veranschaulicht werden. Zwei gekoppelte Pendel in und außerhalb der Resonanzlage veranschaulichen die Pendellösung bei Einfall unter dem Braggschen Winkel und außerhalb desselben, drei gekoppelte Pendel geben die Verhältnisse an, wenn eine Kikuchi-Linie eine Interferenz durchsetzt. Hierbei spielt die „Umweganregung“, d. h. die Energieübertragung von einem auf das andere über das dritte Pendel eine Rolle. Die mechanische Analogie zeigt auch einen Weg zur experimentellen Bestimmung der Phasenfaktoren von Strukturamplituden.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

**Booth, Andrew D.: Radial Patterson distribution functions.** Nature, London **163**, 169 (1949).

Der Vergleich der aus einer angenommenen Struktur und der aus den Meßwerten der Intensität sich ergebenden Strukturfaktoren mit Hilfe von Patterson-Diagrammen leidet unter dem Nachteil, daß sowohl die innermolekulare Anordnung als auch die zwischenmolekularen Abstände bekannt sein müssen. Da jedoch eine Patterson-Synthese in einer gewissen Umgebung des Ursprungs im wesentlichen nur von der innermolekularen Anordnung abhängt, so kann in einem gewissen Umfange die Richtigkeit einer angenommenen Molekülstruktur für sich allein experimentell nachgeprüft werden. In der vorliegenden Mitteilung werden kurz die Patterson-Funktionen für die Beobachtungswerte  $|F_{hkl}|^2$  für kugel- und zylindersymmetrische Dichtefunktionen abgeleitet. Sie lauten

$$G_3(r) = \frac{1}{V} \sum_{hkl} |F_{hkl}|^2 \sin(2\pi r/R_{hkl}) / (2\pi r/R_{hkl})$$

und

$$G_2(r) = \frac{1}{V} \sum_{hkl} |F_{hkl}|^2 I_0(2\pi r/R_{hkl}),$$

wo  $V$  das Zellvolumen und  $R_{hkl}$  den Netzebenenabstand bezeichnen. Anwendungen dieses Verfahrens bei kristallinen Pulvern sind vom Verf. bereits beschrieben worden [Trans. Faraday Soc. **44**, 37 (1948)]. Er weist insbesondere auf seine Bedeutung für die Bestimmung der Molekülstrukturen von Proteinen hin. Es erlaubt, gewisse der zahlreichen angenommenen Strukturen sofort auszuschneiden, wenn es auch nicht die Richtigkeit einer angenommenen Struktur eindeutig erweisen kann.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

**Raether, H.: Zur Theorie der Elektroneninterferenzen an kleinen Kristallen.** Z. Physik **126**, 185—206 (1949).

An Hand der Verhältnisse im reziproken Gitter werden die Elektroneninterferenzen an kleinen Kristallen diskutiert und die verschiedenen Beobachtungen und Betrachtungen unter einheitlichen Gesichtspunkten zusammengefaßt. Gegenüber großen Kristallen mit scharfen reziproken Gitterpunkten gehören zu kleinen Kristallen ausgedehnte Intensitätsbereiche, deren Form und Ausdehnung von der Form und Größe der Kristalle abhängt. Außerdem treten dazwischen Nebenmaxima in verhältnismäßig geringer Anzahl auf, so daß sie gut beobachtet werden können. Mit Hilfe der Ewaldschen Ausbreitungskugel lassen sich die zu erwartenden Elektroneninterferenzen gut übersehen. Das gleichzeitige Auftreten vieler Interferenzen bei Einkristallen und von verbreiterten Linien bei Pulvern lassen sich auf diese Weise verstehen, die Nebenmaxima geben bei konvergenten Strahlen zu besonderen Erscheinungen Anlaß. Im allgemeinen treten auch Maxima auf, die bei großen Kristallen durch den Strukturfaktor, der bei kleinen Kristallen im allgemeinen nicht mehr definiert werden kann, verboten sind. Aus der Form und Größe des Primärflecks lassen sich Form und Größe der streuenden Kristalle ermitteln. Auch die Gasinterferenzen lassen sich auf diese Weise im Zusammenhang mit der Molekülform anschaulich deuten. Die Bedeutung der Nebenmaxima und der Kleinwinkelstreuung für die elektronenoptische Abbildung wird besprochen.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

## Astronomie. Astrophysik.

•Pahlen, E. von der: **Einführung in die Dynamik von Sternsystemen (Lehrbücher und Monographien aus den Gebieten der exakten Wissenschaften, 10: Astrophysik-geophysikalische Reihe, Bd. I).** Basel: Verlag Birkhäuser 1947. 240 p. 36 S.francs.

Die Dynamik von Sternsystemen wird in zwei Teilen dargestellt, wobei der erste der allgemeinen Theorie und der zweite den dynamischen Phänomenen in konkreten Sternsystemen gewidmet sein soll. Diese Einteilung wird jedoch dadurch aufgelockert, daß im zweiten Teil die Grundlagen der allgemeinen Theorie der stationären und nichtstationären Sternsysteme mit inneren Strömungen mitbehandelt werden. Der erste Teil umfaßt zwei Kapitel: Im 1. Kap. werden die Eigenschaften eines Stern gases beschrieben, in dem die Wechselwirkungen eine Rolle spielen und auf das die Methoden der kinetischen Gastheorie (die Sterne als Moleküle aufgefaßt) angewendet werden. Insbesondere wird die Relaxationszeit abgeleitet. Ferner wird die 6-dimensionale Kontinuitätsgleichung (in  $u, v, w, x, y, z$ ) als die „Grundgleichung der Stellarstatistik“ vorgeführt. Im 2. Kap. werden die bekannten Integrale der Kontinuitätsgleichung beschrieben. Im II. Teil, der sich auf konkrete Sternsysteme bezieht, werden im 3. Kap. die Beobachtungsdaten über die räumliche Verteilung und die Bewegungen der Sterne kurz beschrieben. Die Theorie der galaktischen Rotation in der Oortschen Darstellungsweise schließt sich daran an. Im 4. Kap. wird nach einer kurzen Beschreibung der außergalaktischen Sternsysteme diejenige Theorie wiedergegeben, die als Geschwindigkeitsverteilung eine Funktion einer allgemeinen quadratischen Form in  $u, v, w$  postuliert mit ortsabhängigen Strömungsgliedern. Sowohl die stationären wie die nichtstationären Fälle, die von Chandrasekhar ausführlich durchmustert wurden, werden beschrieben. Nach Schürer wird gezeigt, wie die nichtstationären Fälle durch einfache Transformationen aus den stationären hervorgehen. [Bemerk. des Ref.: 1. Die Ableitung der Relaxationszeit ist nach einer Reihe von Irrwegen früherer Autoren korrekt von Chandrasekhar [Astrophys. J. **93**, 285—304, 305, 323—326 (1941); dies. Zbl. **25**, 144] durchgeführt worden. Die im 1. Kap. wiedergegebene Ableitung zeigt zwar den Weg, ist aber noch inkorrekt. 2. Die ausführliche Behandlung der Chandrasekharschen Integrale im 4. Kap. wird dadurch in ihrem Wert herabgesetzt, daß diese, bis auf unwesentliche Spezialfälle, der Poissonschen Gleichung nicht genügen, die für Sternsysteme im eigenen Gravitationsfeld erfüllt sein muß.]

W. Fricke (Hamburg).

Kabakcioglu, T. Okay: **Berechnung der langperiodischen Störungen 2. Ordnung der Massen bei mehrfach kommensurablen Typen.** Univ. Istanbul, Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst. 72—77 (1948).

Diese Abhandlung ist die Fortsetzung einer früheren Arbeit desselben Verf. [Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul **6**, 192—223 (1942); dies. Zbl. **27**, 354], in der er die langperiodischen Störungen der Bahnelemente für die erste Ordnung in den störenden Massen berechnet. Unter Benutzung der Ergebnisse dieser Untersuchung berechnet er nunmehr auch die Störungen zweiter Ordnung. *Stumpff*.

Jekhowsky, Benjamin de: **Réduction à sa plus simple expression du système principal d'équations des méthodes d'Olbers et de Gauss pour la détermination des orbites paraboliques.** C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 161—162 (1948). Correction: C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1112 (1948).

In einer früheren Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 489—491 (1947)] hatte Verf. gezeigt, daß die fünf Grundgleichungen des Problems der parabolischen Bahnbestimmung nach Olbers-Gauß sich ohne Genauigkeitsverlust auf zwei reduzieren lassen, falls die Zwischenzeiten hinreichend klein sind. In der vorliegenden Arbeit löst Verf. das umgekehrte Problem. *K. Stumpff* (Vogelsang ü. Seesen).



**Biermann, L.:** Über die Ursache der chromosphärischen Turbulenz und des UV-Exzesses der Sonnenstrahlung. *Z. Astrophys.* **25**, 161—177 (1948).

Der bei mittlerer Sonnenfleckenzahl zeitunabhängige Anteil des UV-Exzesses der Sonnenstrahlung, ferner die Turbulenz und der dadurch bedingte geringe Dichtegradient sowie die Überanregung der hohen Energieniveaus in der äußersten Chromosphäre, deren optische Tiefe im Wellenlängenbereich des Lymankontinuums von der Ordnung 1 ist, wird erklärt durch die hier durch Turbulenz dissipierte Energie fortschreitender Druck- oder Stoßwellen von mäßiger bis großer relativer Amplitude und Perioden von einigen Minuten. Die Wellen werden durch die Stöße der aus der Wasserstoffkonvektionszone aufsteigenden Granulationselemente gegen die Grenze der stabil geschichteten Photosphäre erregt. Druckschwankungen, deren Frequenzen unterhalb der Eigenfrequenz der Sonnenatmosphäre liegen; führen auf stehende Wellen und tragen nicht zum Energietransport bei, während solche mit darüberliegenden Frequenzen fortschreitende Wellen erzeugen, wobei die exponentielle Abnahme der Dichte durch ein entsprechendes Anwachsen der relativen Amplituden nach außen hin gerade kompensiert wird. Das bedingt zugleich eine vermehrte Dissipation der Energie, die in der Photosphäre gegenüber der absorbierten und emittierten Energie noch zu vernachlässigen ist, aber in Gebieten großer relativer Amplitude (von der Ordnung 1) durch einsetzende Turbulenz den mit den Wellen verbundenen Energiefluß auf  $\approx \rho v^3$  ( $\rho$  Dichte,  $v$  Geschwindigkeit der Turbulenzelemente) beschränkt, was aber zur Aufrechterhaltung des UV-Exzesses in diesen hohen Atmosphärenschichten noch ausreichend ist. Die durch die fortschreitenden Druckwellen in die hohe Chromosphäre geschaffte und dort dissipierte Energie erhöht die Temperatur dieser Schichten auf etwa 9000°. Starke lokale Temperaturunterschiede bedingen die Überanregung gerade der höchsten Terme oder Energieniveaus.

H. Krause (Hamburg-Bergedorf).

**Ryle, M.:** The generation of radio-frequency radiation in the sun. *Proc. R. Soc. London A* **195**, 82—97 (1948).

Nach einer Übersicht über die Beobachtungen der ruhigen und der gestörten Kurzwellenstrahlung der Sonne wird die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in einem ionisierten Gas auf Grund früherer Resultate von Appleton und Booker diskutiert. Bei Gegenwart eines Magnetfelds tritt Doppelbrechung ein, und der ordentliche und der außerordentliche Strahl werden in verschiedener Weise gebrochen und absorbiert. Es zeigt sich, daß die durch die Larmorbewegung der Elektronen erzeugte Strahlung sich nur in Richtung wachsender magnetischer Feldstärke fortpflanzen kann. Diese Resultate werden auf die Sonne angewandt. Es wird dazu die Wechselwirkung der ungleichförmigen Rotation der Sonne und eines allgemeinen Magnetfelds von Dipolcharakter (mit gegen die Rotationsachse geneigter Symmetrieachse) betrachtet; dann entstehen induzierte Potentialunterschiede der Ordnung  $10^6$  bis  $10^7$  Volt, von denen auf Grund früherer Überlegungen von Alfvén angenommen wird, daß sie lokal Elektronentemperaturen der Ordnung  $10^6$  bis  $10^8$  Grad aufrecht erhalten können. In der Umgebung von Flecken werden sogar Elektronentemperaturen bis  $10^{10}$  Grad angenommen. Aus der Temperatur und dem Absorptionskoeffizienten ergibt sich die in den verschiedenen Frequenzbereichen emittierte Strahlung. Die einseitige Strahlung in den Larmorfrequenzen gibt Anlaß zu einem Strahlungsdruck, der Bedeutung für die Dynamik der Sonnenkorona haben sollte. Verf. schließt, daß wenigstens qualitativ die Beobachtungen der Kurzwellenstrahlung verstanden werden können. *L. Biermann.*

**Chandrasekhar, S.:** The transfer of radiation in stellar atmospheres. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 641—711 (1947).

Die vorliegende J.W. Gibbs-Lecture gibt eine zusammenfassende Darstellung zahlreicher Arbeiten im Astrophysical Journal, in welchen Verf. sich seit 1944 um die Entwicklung neuartiger Methoden zur Behandlung stationärer Strahlungsfelder in Sternatmosphären bemüht hat. Die grundlegenden Integrodifferentialgleichungen werden aufgestellt für planparallele Atmosphären mit isotroper und anisotroper Streuung, auch unter Berücksichtigung der Polarisation der Streustrahlung. In denselben Rahmen paßt die Schwarzschild-Milnesche Integralgleichung für die Gesamtstrahlung der „grauen“ Atmosphäre. — Die Integrodifferentialgleichungen lassen sich zunächst in Systeme linearer Gleichungen überführen, indem man die Integrale über die Winkel der Einheitssphäre mit Hilfe von Gauss' „Methodus nova . . .“ durch Summen ersetzt, in denen die Funktionswerte bei den Nullstellen der Legendreschen Polynome  $P_{2n}(\cos \vartheta)$  vorkommen, wo  $\vartheta$  die „Zenithdistanz“ bedeutet. Die Lösung dieses Gleichungssystems wird zunächst für die  $n$ -te Näherung durchgeführt; die exakte Lösung entsteht im  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ . Als Hilfsmittel wird eine Funktion  $H(\cos \vartheta)$  eingeführt (S. 661), die im wesentlichen die Winkelverteilung der an der Sternoberfläche austretenden Strahlung beschreibt. Für diese

Funktion  $H$  gewinnt Verf. eine Funktionalgleichung (S. 671 und 675), auch im  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ .

Einen ganz neuartigen Gesichtspunkt liefert die Überlegung von V. A. Ambarzumian, daß die Richtungsverteilung der aus einer unendlich tiefen Atmosphäre austretenden Strahlung sich nicht ändern kann, wenn an deren Oberfläche eine dünne Schicht  $d\tau$  angesetzt wird. Man kommt so wieder auf den vom Verf. gefundenen Typ von Funktionalgleichungen. Diese werden für eine Anzahl astrophysikalisch wichtiger Probleme gelöst. Darüber hinaus werden eine Reihe neuer Theoreme über derartige Funktionalgleichungen bewiesen und die Darstellung von  $H$  durch ein komplexes Integral angegeben. — In Abschn. 37 wird noch das weitere Problem einer Atmosphäre mit differentiellen Bewegungen behandelt, welches auf eine neuartige Klasse von Randwertproblemen hyperbolischer Differentialgleichungen führt.

Unsöld (Kiel).

**Bartels, Hans: Über Linienemission aus inhomogener Schicht. I. Z. Physik 125, 597—614 (1949).**

Die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie („Linienkontur“), welche in einer inhomogenen Lichtquelle emittiert wird, hängt zusammen mit der Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten („Linienform“) und der Schichtdicke, sowie der relativen Verteilung des Absorptionskoeffizienten und der Ergiebigkeit (welche bei lokalem thermischen Gleichgewicht in die Kirchhoff-Planck-Funktion übergeht) innerhalb der emittierenden Schicht. In vorliegendem Teil I wird vorausgesetzt, daß die Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten in allen Teilen der Lichtquelle dieselbe sei sowie daß die Ergiebigkeit in der Lichtquelle von innen nach außen abnehme. Dann kann man innerhalb weiter Grenzen die zunächst ziemlich unübersichtlich erscheinende Mannigfaltigkeit möglicher Fälle im wesentlichen durch einen Parameter beschreiben und den Zusammenhang zwischen der Strahlungsintensität bei einer bestimmten Frequenz und der optischen Schichtdicke berechnen. Mit Hilfe der Frequenzabhängigkeit der optischen Schichtdicke innerhalb der Linie läßt sich von hier aus auch die Theorie der Linienkontur entwickeln.

Unsöld (Kiel).

**Bartels, Hans: Über Linienemission aus inhomogener Schicht. II. Z. Physik 126, 108—140 (1949).**

Die im vorangehenden Teil I (s. vorsteh. Referat) entwickelte Theorie der Intensitätsverteilung von Spektrallinien, welche in inhomogener Schicht emittiert werden, läßt sich erweitern auf den Fall, daß die Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten nicht mehr konstant ist, sondern in der emittierenden Schicht variiert. Auch dann lassen sich noch einige ziemlich allgemein gültige Aussagen machen. Die Zusammenhänge der vorliegenden Probleme mit verwandten astrophysikalischen Fragestellungen werden erörtert.

Unsöld (Kiel).

**Rosa, Annemarie: Der Aufbau der Sternatmosphären. I: Ionisation stellarer Materie. Z. Astrophys. 25, 1—10<sup>1</sup> (1948).**

Auf Grund neuerer Untersuchungen von Unsöld an der Sonne und  $\tau$  Scorpii (BO) über die chemische Zusammensetzung der Sternatmosphären, wobei neben der Häufigkeitsverteilung von H und Metallen auch die von He und Nichtmetallen berücksichtigt wurde, wird hier nach der Sahaschen Formel unter besonders sorgfältiger Berechnung der Zustandssummen die Ionisation der Sternmaterie bestimmt. Darauf wird die Anzahl  $E$  der Elektronen pro Atomkern, der Gasdruck  $P_g = \frac{1+E}{E} P_e$  und das effektive Molekulargewicht  $\mu = \frac{1.505}{1+E}$  in Abhängigkeit vom Elektronendruck  $P_e$  ( $10^{-2}$  bis  $10^5$  bar) und der Temperatur  $T$  (3600 bis 72000°) errechnet und graphisch dargestellt.

H. Krause (Hamburg-Bergedorf).

**Unsöld, Albrecht: Der Aufbau der Sternatmosphären. II: Adiabatische Zustandsänderungen stellarer Materie. Z. Astrophys. 25, 11—19 (1948).**

Für Sternmaterie aus 85% H und 15% He (nach Atomzahlen), wobei die übrigen Elemente mit nur 0,2 bis 0,3% vernachlässigt werden können, wird unter Verwendung der Ionisationsformel die Gesamtentropie  $S$  durch Summation über H,  $H^+$ ; He,  $He^+$ ,  $He^{++}$  und sämtliche freien Elektronen für Temperaturen  $T$  von  $10^{3,5}$  bis  $10^7$  und Gasdrucken  $P_g$  von  $10^{-3}$  bis  $10^{16}$  berechnet.



Die tabulierten Werte werden in einem  $S, T, P_g$ -Diagramm dargestellt, aus dem man für nicht zu hohe Temperaturen deutlich die einzelnen Ionisationszonen von H und He ersieht. Eine direkte Berechnung des adiabatischen Temperaturgradienten  $\Delta = \left( \frac{d \log T}{d \log P_g} \right)_{\text{ad}}$  ist bei Überlagerung mehrerer Ionisationsvorgänge zu kompliziert. Mittels des Entropie-Diagramms läßt sich  $\Delta$  bestimmen als Approximation des entsprechenden Differenzenquotienten. Mit  $\log P_g$  und  $\log T$  als Koordinaten werden nun die Linien für konstantes  $\Delta$  gezeichnet. Aus diesem Schichtliniendiagramm übersieht man sofort die Gebiete größerer Abweichungen von dem Wert  $\Delta = 0,40$ , der für neutrale oder vollständig ionisierte Materie gilt. Sodann wird gezeigt, wie man mit Hilfe des  $S, T, P_g$ -Diagramms die Übergänge von Strahlungsgleichgewicht zu adiabatischem Gleichgewicht und umgekehrt, d. h. die Grenzen der Konvektionszone, finden kann. *Krause.*

**Rosa, Annemarie und Albrecht Unsöld: Der Aufbau der Sternatmosphären. III: Die spezifische Wärme  $c_p$  als Funktion von Druck und Temperatur. Z. Astrophys. 25, 20—27 (1948).**

Zur Beurteilung des konvektiven Energietransportes in Sternen werden für ein Gemisch aus 85% H und 15% He (nach Atomzahlen) bei mehreren sich überschneidenden Ionisationen die spezifische Wärme  $c_p$  und die Enthalpie  $W$  für Temperaturen  $T$  von  $10^{3,7}$  bis  $10^{5,1}$  und Gasdrücken  $P_g$  von  $10^{-2,5}$  bis  $10^{13,5}$  berechnet und graphisch dargestellt. *H. Krause.*

**Biermann, L.: Konvektion in rotierenden Sternen. Z. Astrophys. 25, 135—144 (1948).**

Nachdem Randers [Astrophysic. J., Chicago 94, 109 (1941)] bewiesen hatte, daß bereits die langsame Sonnenrotation den konvektiven Energietransport so stark beeinflußt, daß der Energiefluß anisotrop wird, und zwar in Richtung der Pole viel stärker als am Äquator, entsprechend einer höheren Temperatur auf den isobaren Flächen am Pol als am Äquator, was ein an den Polen aufsteigendes und am Äquator absteigendes Strömungssystem und dementsprechend eine raschere Rotation der Äquatorschichten zur Folge hat, wird hier gezeigt, daß in mittleren Breiten und besonders in der Äquatorzone nach der konvektiven Transportgleichung unter Berücksichtigung der Rotation die freie Weglänge der Turbulenzelemente in radialer Richtung nicht mehr wie im Falle eines nichtrotierenden Sternes oder in der Achsenrichtung eines rotierenden Sternes etwa einer Zonendicke entspricht, sondern z. B. bei der Sonne um etwa eine halbe Zehnerpotenz reduziert werden muß. Um dennoch den gesamten Energiefluß zu befördern, braucht der Temperaturgradient den adiabatischen kaum zu übersteigen, so daß der Energiefluß annähernd isotrop bleibt. Ein geringer Temperaturüberschuß an den Polen gegenüber dem Äquator auf den isobaren Flächen bedingt eine raschere Rotation des Kerns und ist mehr als ausreichend zur Aufrechterhaltung einer in der Achse aufsteigenden und längs der Oberfläche des konvektiven Kerns äquatorwärts fließenden Konvektion, die eine äquatoriale Beschleunigung nach sich zieht. *H. Krause (Hamburg-Bergedorf).*

**Lambrecht, H.: Über die Bewegungsverhältnisse des interstellaren Gases. Astron. Nachr. 277, 1—11 (1949).**

Spektroskopische Beobachtungen am Mt. Wilson-Observatorium ergaben, daß im interstellaren Gas der Mittelwert der turbulenten Geschwindigkeit für die Ca II-Atome zwei- bis dreimal so groß ist wie für die Na-Atome. Verf. berechnet nun die Beschleunigung dieser Teilchen durch den selektiven Strahlungsdruck (herrührend von der Strahlung aller Sterne des Milchstraßensystems) unter Berücksichtigung der Ionisation. Er findet, daß so tatsächlich in Zeiträumen der Größenordnung  $10^7$  Jahre (Lebensdauer einer interstellaren Gaswolke) Geschwindigkeiten der beobachteten Größe erzeugt werden können und daß diese für Ca II und Na I in etwa dem beobachteten Verhältnis stehen. Die Abhängigkeit des Effektes von der galaktischen Konzentration der Sterne früher Spektralklassen wird diskutiert.

*Unsöld (Kiel).*

**Bondi, H.: Spherically symmetrical models in general relativity. Monthly Not. astron. Soc., London 107, 410—425 (1947).**

Die stets und überall endliche Massendichte und die stets radial gerichtete Teilchengeschwindigkeit seien nur abhängig von einer radialen Koordinate und der Zeit. Elektromagnetische Kräfte und Druck (sowie meistens die kosmologische Konstante  $\lambda$ ) werden Null gesetzt. Ein Substrat von Staub mit vernachlässigbarer Masse fülle die sonst leeren Teile des Raums aus. Betrachtet werden radiale geodätische Linien; mit ihnen werden radiale Koordinate und Zeitkoordinate definiert. Der Energie-Impuls-Tensor enthält nur noch eine nichtverschwindende



Komponente, die gleich der Teilchendichte ist. Nach Ableitung der Leuchtkraftkorrektur für ferne Objekte proportional dem Quadrat der Rotverschiebung in den Spektren wird die Entfernungsbestimmung mittels des Verhältnisses der scheinbaren zur absoluten Leuchtkraft benutzt, um eine physikalische Definition der Entfernung vom Ursprung zu bekommen. Das Vorzeichen der Krümmung eines dreidimensionalen Raumteils wird bestimmt durch das Vorzeichen seiner Gesamtenergie; damit hat also auch die potentielle Energie geometrische Bedeutung gewonnen. Durch Spezialisierung auf Homogenität und Isotropie werden die gewöhnlichen kosmologischen Weltmodelle erhalten. *Dieckvoß.*

**Ludwig, Günther und Claus Müller: Ein Modell des Kosmos und der Sternentstehung.** Ann. Physik, VI. s. 2, 76—84 (1948).

Es werden Feldgleichungen der Gravitation mit variabler Gravitations-, „Konstante“ mitgeteilt, welche die von Jordan vorgeschlagenen Weltmodelle als Lösung enthalten. — [Die Lösung wird nicht als Spezialfall von sehr viel umfassenderen Lösungsmannigfaltigkeiten derselben Feldgleichungen erkannt, welche den Jordanschen Modellen nicht entsprechen. Ref.] *Heckmann* (Hamburg-Bergedorf).

**Fourès-Bruhat, Yvonne et André Lichnerowicz: Sur un théorème global de réduction des  $ds^2$  statiques généraux d'Einstein.** C. r. Acad. Sci., Paris 226, 775—777 (1948).

Es wird ein Raum-Zeit-Modell betrachtet, in dem sämtliche Massen nur bis zu einer beschränkten Entfernung vom Ursprung auftreten; das Linienelement sei statisch und lasse eine asymptotische Darstellung zu, bei der mit wachsendem Abstand vom Ursprung die Abweichungen vom Euklidischen Linienelement gegen Null konvergieren. Dann läßt sich das Linienelement in jedem der beiden folgenden Fälle überall auf Orthogonalgestalt bringen: 1. Die Strömungslinien des Vektors der Vierergeschwindigkeit  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) der Materie im Innern des materieverfüllten Raumes fallen mit den Zeitlinien (nur  $u^4 \neq 0$ ) zusammen. 2.  $ds^2$  ist im materieverfüllten Raum gleichzeitig statisch und orthogonal. *Dieckvoß.*

**Lichnerowicz, André et Yvonne Fourès-Bruhat: Théorème global sur les  $ds^2$  extérieurs généraux d'Einstein.** C. r. Acad. Sci., Paris 226, 2119—2120 (1948).

Es wird der Satz bewiesen: Für jede Welt-Röhre, die aus den räumlichen Schnitten  $t = \text{const.}$  beschränkte Raumteile ausschneidet, welche mit Materie geringer Dichte gefüllt werden können, die ein im Innern der Materie reguläres Feld erzeugt, müssen im äußeren, materiefreien Raum notwendig Singularitäten entstehen. *Dieckvoß* (Hamburg-Bergedorf).

**Drumaux, P.: La récession des nébuleuses extra-galactiques. I.—IV.** Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. s. 61, 228—234 (1947); 62, 27—35, 74—82 (1948); 63, 46—57 (1949).

Die Darstellung benutzt die Vorstellungen und Hilfsmittel der allgemeinen Relativitätstheorie. In der Umgebung der Milchstraße als Ursprung eines kosmischen Raum-Zeit-Koordinatensystems werden die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors in Potenzreihen bis zu Gliedern dritter Ordnung in den Koordinaten um die Euklidischen Werte entwickelt. Die Betrachtungen werden auf maximale Entfernungen von etwa  $10^8$  Lichtjahren beschränkt, innerhalb derer die Abweichungen vom Euklidischen Linienelement nicht über  $1/1000$  hinausgehen. Die Parameter für die Bahnen der extragalaktischen Nebel werden charakterisiert durch die Wurzeln einer Säkulargleichung dritten Grades. In der ersten Arbeit wird der Fall einer reellen Wurzel behandelt: Die Bahnen sind im allgemeinen Schraubenlinien, deren Projektionen auf passende Ebenen elliptische Spiralen sind. — In der zweiten Arbeit wird der Fall von drei reellen Wurzeln behandelt. Die Geschwindigkeit, der Nebel wird in zwei Teile zerlegt: Eine radiale Geschwindigkeit, kombiniert mit einer transversalen Nutation und eine Präzession um eine „kosmische Achse“. Je nachdem ob die Präzessionsgeschwindigkeit der der Milchstraße benachbarten



Nebel groß oder klein ist, sind ihre Bahnen wieder Schraubenlinien oder rein aperi-odisch; im allgemeinen ist aber die Präzession nie Null. Die Transversalgeschwindigkeiten der Nebel haben dieselbe Größenordnung wie die Radialgeschwindigkeiten; die Größenordnung der Winkelgeschwindigkeit ist 0,001 im Jahrhundert. Verf. schließt aus der Umkehrung des Vorkommens einer mit der Masse nach dem Schwarzschild'schen Linienelement verbundenen Länge auf enorme, außerhalb des beobachtbaren Teils des Universums liegende Massen. Im Felde dieser Massen sind die Bahnen der Milchstraße und der umgebenden Nebel nahezu geradlinig mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit. Verf. folgert, daß die Milchstraße eine Potentialmulde durchläuft und daß die Fluchtbewegung der Nebel zum Stehen kommen und in eine Annäherungsbewegung übergehen muß. — In der dritten Arbeit wird die Frage der Ableitung der Bahnen der extragalaktischen Nebel aus den astronomischen Beobachtungen diskutiert. Nach dem allgemeinen Ansatz ist eine Abweichung von einer reinen Fluchtbewegung zu erwarten, die sich in dem Auftreten eines mit der Entfernung quadratisch zunehmenden transversalen Dopplereffekts zeigen muß. In den Beobachtungen würde er aus einer Abweichung des gemessenen Dopplereffektes von der Proportionalität mit der Entfernung zu erkennen sein. Verf. untersucht die prinzipielle Anordnung von Beobachtungen, die nötig sind, um die 9 Koeffizienten der fundamentalen linearen Vektorfunktion, die die Nebelgeschwindigkeiten als Funktionen der Radiivektoren darstellt, abzuleiten. Die Genauigkeit der Beobachtungen, insbesondere der Entfernungsbestimmungen, reichen vorläufig nicht aus für eine experimentelle Prüfung. — In der vierten Arbeit wird die Bewegung der Milchstraße im Feld der hypothetischen fernen, großen Massen behandelt. Aus den beobachteten Maximalentfernungen von  $5 \times 10^8$  Lichtjahren errechnet Verf. eine Gesamtmasse der jenseits der durch die Instrumente gezogenen Grenze der Beobachtbarkeit liegenden hypothetischen Massen von rund dem 1000fachen der Gesamtmasse der beobachtbaren Nebel. Die Größenordnung der Relativgeschwindigkeiten der beobachtbaren Nebel ist 100 000 km/sec. Die Größenordnung der hypothetischen Massen macht noch höhere Geschwindigkeiten der Milchstraße und der umgebenden Nebel wahrscheinlich. Die beobachtete Fluchtbewegung der Nebel wird damit als scheinbares Beobachtungsergebnis der Verschiedenheiten der sehr großen systematischen Geschwindigkeiten der Nebel im Feld der großen fernen Massen gedeutet. *Dieckvoß* (Hamburg-Bergedorf).

Gosselin, Jacques: Sur le déplacement des spectres des nébuleuses vers le rouge et l'évolution de l'univers. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 228—230 (1948).

Für das Linienelement

$$ds^2 = -R^2(t) [d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\Theta^2 + \cos^2 \Theta \cos^2 \varphi d\varphi^2] + dt^2$$

werden die Differentialgleichungen der Geodätischen integriert. Anwendung auf die Rotverschiebung der Nebel. *Dieckvoß* (Hamburg-Bergedorf).

Järnefelt, G.: On the one-body problem in the expanding universe. 10. Skand. Mat. Kongr., København 1946, 160—171 (1947).

An Hand eines 1933 von Mc Vittie angegebenen Linienelements für ein expandierendes, homogen mit Masse angefülltes Universum, das im Zentrum eine Zusatzmasse enthält, werden die geodätischen Linien als Bahnen eines sich um die Masse im Zentrum herumbewegenden Probekörpers untersucht, zuerst der Spezialfall des Schwarzschild'schen Linienelements (Expansion = Null), dann der der Newtonschen Mechanik und schließlich der allgemeine Mc Vittiesche Fall. Der Einfluß der Expansion erweist sich als praktisch so gering, daß die Bahn mit der Bahn nach Schwarzschild identisch bleibt, daß also die allgemeine Expansion nicht die Planetenbahnen und die Bahnen der Sterne um das Milchstraßenzentrum beeinflusst. In einem mathematischen Anhang werden die Differentialgleichungen für die Newtonsche elliptische Bewegung auf die gleiche Form wie in den untersuchten allgemeineren Fällen gebracht. *Dieckvoß* (Hamburg-Bergedorf).